

## 品牌竞争下双渠道供应链的量子博弈 Quantum Game of Dual-Channel Supply Chain under Brand Competition

张有中<sup>1</sup>      王秀雯<sup>2\*</sup>  
Yu-Chung Chang      Xiu-Wen Wang

### 摘要

本文基于量子博弈的观点,考虑一个制造商通过网络直销与零售双渠道供应链销售产品,同时存在另一制造商仅通过网络直销渠道销售可替代产品,探讨品牌竞争下三个博弈方的定价策略。制造商间及双渠道供应链之间的竞合关系,可以视为一个量子纠缠现象,不论是在分散式或集中式决策下,当量子纠缠度大于零时,各博弈方量子博弈的最优利润皆高于经典博弈;当量子纠缠度趋于无穷时,量子博弈的最优价格与最优利润最后保持收敛,因此量子博弈理论是优于经典博弈理论的决策方法。数值模拟证明,分散决策降低了供应链的整体效率;各博弈方的最优利润是渠道交叉系数与品牌交叉系数的增函数,并且相对于品牌竞争,渠道竞争对双渠道供应链的影响更显著;当品牌忠诚度高于某一数值后,各博弈方的最优利润是品牌忠诚度的增函数。

**关键词:** 量子博弈、经典博弈、双渠道供应链、量子纠缠度、定价

### Abstract

Based on the perspective of quantum games, this article studies the pricing strategies under brand competition among three game players, which are one manufacturer selling a product through an Internet and a retailer channels while another manufacturer selling a substitute product only through the Internet channel. The competitive relationship among three game players can be regarded as a quantum entanglement phenomenon. No matter under decentralized decision-making or centralized decision-making, each game player's optimal profit of quantum game is higher than that of classical game when the quantum entanglement is greater than zero. When the quantum entanglement approaches infinity, the optimal price and optimal profit of the quantum game finally converge. The numerical analysis shows that decentralized decision-making reduces the overall efficiency of the supply chain. The optimal profit of each player is an increasing function of the channel cross-price elasticity coefficient and the brand cross-price elasticity coefficient. Furthermore, for the dual-channel supply chain, channel competition has a greater impact than brand competition. When brand loyalty is higher than a certain value, the optimal profit of each player is an increasing function of brand loyalty.

**Keywords:** Quantum Game, Classical Game, Dual-channel Supply Chain, Quantum Entanglement, Pricing

<sup>1</sup> 厦门大学嘉庚学院管理学院副教授

<sup>2</sup> 厦门大学嘉庚学院信息科学与技术学院讲师 wxwwang@xujc.com\*通讯作者

\* 基金项目: 厦门大学嘉庚学院校级孵化项目 (YM2019L06)

## 1. 引言

电子商务的蓬勃发展促使网络消费模式的普及,传统的零售模式已不再能满足消费者的购物需求,各制造商纷纷开辟网络直销渠道,不仅使得零售渠道和网络直销渠道并存的双渠道模式供应链迅速发展,更促使完全或主要以网络为销售中心,利用互联网打造的网货品牌的兴起,对传统品牌形成冲击,品牌和渠道的竞争日益激烈。

国内外学者对双渠道供应链的研究已有很多成果,而定价决策问题一直是其中最广泛被研究的问题 (Chiang & Hess, 2003)。Yao 与 Liu (2005) 研究双渠道中定价决策问题的 Bertrand 和 Stackelberg 模型;王虹与周晶 (2010) 研究竞争和非竞争环境下,风险规避决策者的双渠道供应链定价问题;申成然等 (2014) 针对比价行为下,部分消费者优先在网络渠道购买产品的现象,对双渠道供应链的定价决策及协调策略问题进行研究,并构建单渠道和双渠道的供应链决策模型;Yan 等 (2011) 研究双渠道供应链下的产品配送和协调问题,发现制造商可以通过其在线渠道和传统渠道销售相同的品牌,采用具有利润协调的合作结构,以最大化渠道利润的整体分配;马鹏与王海燕 (2015) 研究需求依赖于促销努力水平下的供应链优化协调问题,并探讨集中式供应链和分散式供应链模型的协调策略;在分散式模型中,改进批发价格契约,使零售商向制造商批发商品的总支付额符合特定条件,则批发价格契约可以实现双渠道供应链的协调。

在双渠道供应链的品牌竞争和渠道竞争方面,Kurata 等 (2007) 研究传统品牌与零售商自有品牌双渠道供应链竞争的定价策略,并以涨价契约来实现供应链的协调;Yan (2011) 证明尽管差异化品牌可以有效地减弱渠道竞争和冲突,但它不能达到完全协调;王晓锋等 (2015) 研究品牌竞争的双渠道供应链定价策略,发现各博弈方的最优定价是关于品牌忠诚度的增函数;李景峰等 (2017) 发现搭便车行为对零售商不利,各博弈方的最优定价是关于渠道间及品牌间交叉价格弹性系数的增函数,且渠道竞争的影响显著高于品牌竞争。

目前研究双渠道供应链定价决策及协调策略问题的方法,大多采用 Stackelberg 经典博弈模型和 Bertrand 经典博弈模型。Meyer (1999) 将经典博弈与量子信息理论结合起来,形成了量子博弈理论,并发现一个使用量子策略的博弈者,总是能够击败使用经典策略的对手;Eisert 等 (1999) 将量子策略引入囚徒困境模型,并利用量子纠缠消除了其中的两难困境。双渠道供应链的制造商与零售商之间存在竞争与合作的关系,这种竞合关系形成了量子纠缠的现象;随着双方竞合加剧,量子纠缠度增加,要如何进行定价以获得最优利润,形成了一个比经典博弈的决策理论更加复杂的问题,因为每一个量子纠缠度都会对应一个经典博弈的决策问题。张有中 (2020) 引入量子博弈理论,研究一个制造商双渠道供应链定价的问题,建立了双渠道供应链定价的量子博弈模型。当零售商与制造商的量子纠缠度为零时,量子博弈决策的定价与经典博弈的定价相同;当量子纠缠度趋于无穷时,量子博弈的最优价格仍然保持收敛。本文基于学者对双渠道供应链的研究成果,考虑品牌竞争下两个制造商双渠道供应链定价的量子博弈模型,并探讨品牌忠诚度对定价的影响,最后与经典博弈模型进行比较。

## 2. 双渠道供应链模型

### 2.1 问题描述

考虑如图 1 的供应链结构,由两个品牌的制造商及一个零售商所组成。制造商  $M_1$  拥有双渠道供应链,以零售渠道透过零售商  $T$  贩卖产品,并以网络直销渠道贩卖产

品。假设产品的生产成本为  $c_1$ ，零售商  $T$  进货的批发价为  $\omega$ ，零售渠道贩卖价格为  $p_0$ ，网络渠道贩卖价格为  $p_1$ 。制造商  $M_2$  的产品与制造商  $M_1$  的产品可相互替代， $M_2$  产品的生产成本为  $c_2$ ，且仅在网络渠道以  $p_2$  价格贩卖。各品牌的品牌忠诚度为  $B_i$ ， $0 \leq B_i \leq 1$ ， $i = 1, 2$ 。

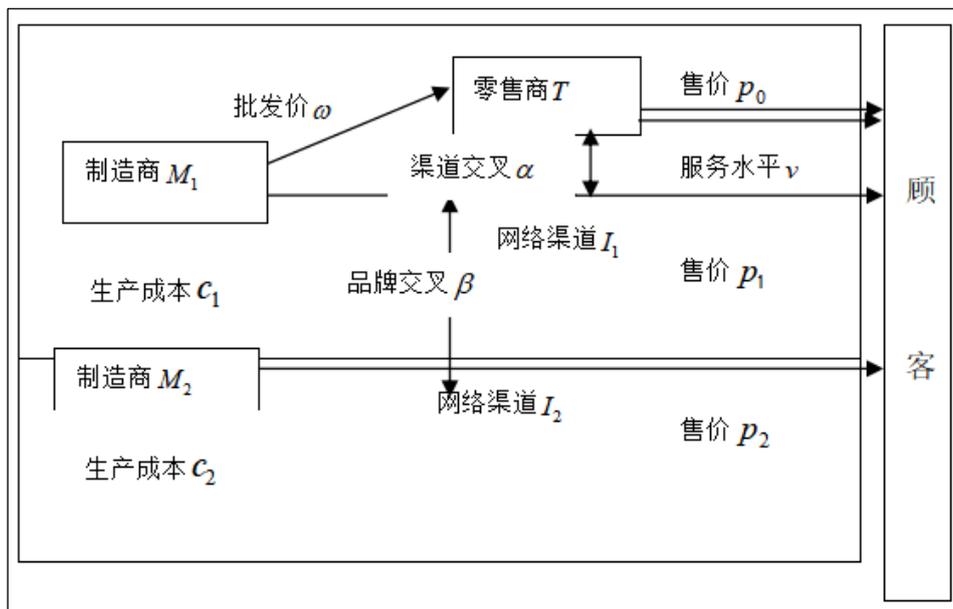


图 1. 考虑品牌竞争的双渠道供应链结构

## 2.2 基本假设

为了使模型更加严谨，作如下假设：

假设 1：制造商与零售商都是理性经理人，为了保证企业的基本营利状态，假设

$$0 < c_1 < \omega < p_0, p_1, 0 < c_2 < p_2;$$

假设 2：假设  $\alpha$  为双渠道供应链中的渠道交叉弹性系数，代表双渠道供应链中某种渠道的产品需求量，对另一渠道产品价格变动的反应灵敏程度，因此  $0 < \alpha < 1$ ；

假设 3：因为零售渠道提供更多种类的服务，例如现场讲解、产品体验等，因此假设只有零售渠道提供服务，网络渠道不提供服务，零售商  $T$  对产品提供的服务水平  $v$  需付出的成本为  $c(v) = \frac{1}{2}\eta v^2$ ，其中  $\eta > 0$  为零售商  $T$  对产品的单位服务成本（Chen 等，2013）；

假设 4：假设  $\beta$  为品牌交叉价格弹性系数，代表在同一种销售渠道中，某种品牌的产品需求量对另一种品牌的同质性产品价格变动的反应灵敏程度，体现了品牌竞争的激烈程度，因此  $0 < \beta < 1$ 。

## 2.3 需求函数

本文主要参考王晓锋等（2015）考虑品牌竞争的需求函数，它是综合 Banker 等（1988）、Wei 与 Swaminathan（2009）文献中采用的基于价格、服务敏感的线性需求函数，以及品牌信誉和消费者价格敏感度关系的相关文献（Erdem 等，2002）所建立的需求函数。零售商  $T$  及制造商  $M_1$ 、 $M_2$  的需求函数，分别如下：

$$Q_0 = a_0 - \frac{\delta_1}{\gamma_1 B_1 + \varepsilon_1} (p_0 - v) + \alpha p_1 + \alpha \beta p_2 \quad (1)$$

$$Q_1 = a_1 - \frac{\delta_1}{\gamma_1 B_1 + \varepsilon_1} p_1 + \alpha (p_0 - v) + \beta p_2 \quad (2)$$

$$Q_2 = a_2 - \frac{\delta_2}{\gamma_2 B_2 + \varepsilon_2} p_2 + \alpha \beta (p_0 - v) + \beta p_1 \quad (3)$$

其中 $Q_1$ 、 $Q_2$ 、 $Q_3$ 分别代表品牌 1 产品在零售渠道的需求、品牌 1 产品在网络渠道的需求及品牌 2 产品的需求。假设  $a_j$  为正数并且是稳定的，代表与  $Q_j$  相对应的潜在市场规模， $j = 0, 1, 2$ 。令  $b_i = \frac{\delta_i}{\gamma_i B_i + \varepsilon_i} > 1$ ，代表消费者对某品牌的自价格敏感度（ $i = 1$ 代表品牌 1、 $i = 2$ 代表品牌 2），其中  $\delta_i$  为产品的顾客保持成本， $\gamma_i$  为顾客感知价值， $\varepsilon_i$  为误差项（Erdem 等，2002；路晓伟与蒋馥，2005）， $\delta_i$ 、 $\gamma_i$ 、 $\varepsilon_i > 0$ 。

## 2.4 利润函数

根据问题描述、基本假设和需求函数，零售商  $T$  及制造商  $M_1$ 、 $M_2$  的总利润函数  $\pi_0$ 、 $\pi_1$ 、 $\pi_2$  分别如下：

$$\pi_0 = (p_0 - \omega) Q_0 - \frac{1}{2} \eta v^2 \quad (4)$$

$$\pi_1 = (\omega - c_1) Q_0 + (p_1 - c_1) Q_1 \quad (5)$$

$$\pi_2 = (p_2 - c_2) Q_2 \quad (6)$$

零售商  $T$  及制造商  $M_1$  的供应链整体利润  $\pi_{SC1}$  与制造商  $M_2$  的供应链整体利润  $\pi_{SC2}$  为：

$$\pi_{SC1} = (p_1 - c_1) Q_1 + (p_0 - c_1) Q_0 - \frac{1}{2} \eta v^2 \quad (7)$$

$$\pi_{SC2} = \pi_2 = (p_2 - c_2) Q_2 \quad (8)$$

## 3. 量子模型

考虑量子化模型如图 2，由基向量生成的 Hilbert 空间称为一个量子比特，它是同一时刻各个状态的叠加，量子比特的张量积可以表示博弈在每个时刻的状态。

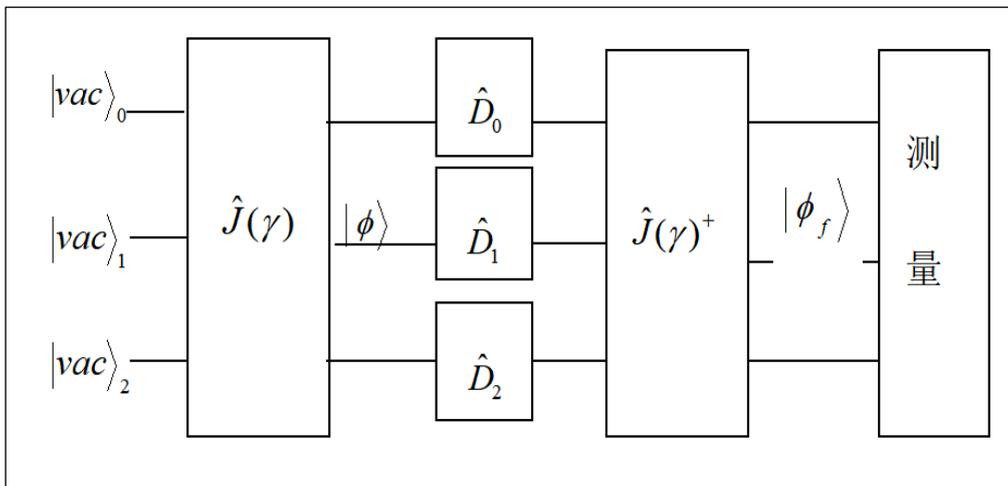


图 2. 品牌竞争下双渠道供应链的量子结构

假设零售商  $T$  及制造商  $M_1$ 、 $M_2$  的博弈从量子态：

$$|vac\rangle_0 \otimes |vac\rangle_1 \otimes |vac\rangle_2 \quad (9)$$

开始，初始状态通过一个特定的么正算子  $\hat{J}(\gamma)$  作用，使初始状态转化为新的量子纠缠状态：

$$|\varphi\rangle = \hat{J}(\gamma)(|vac\rangle_0 \otimes |vac\rangle_1 \otimes |vac\rangle_2) \quad (10)$$

么正算子定义为：

$$\hat{J}(\gamma) = \exp\{i\gamma(\hat{X}_0\hat{P}_1 + \hat{X}_1\hat{P}_2 + \hat{X}_2\hat{P}_0)\} \quad (11)$$

其中  $\hat{X}_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_j^+ + \hat{a}_j)$ ， $\hat{P}_j = \frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{a}_j^+ - \hat{a}_j)$ ， $i = \sqrt{-1}$ ， $j = 0, 1, 2$ 。

量子纠缠状态经过博弈者在策略集  $S_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) 中选择不同策略，策略算子以么正算子  $\hat{D}_0$ 、 $\hat{D}_1$ 、 $\hat{D}_2$  表示，其中：

$$\hat{D}_j(x_j) = \exp(-ix_j\hat{P}_j) \quad (12)$$

$$S_j = \{\hat{D}_j(x_j) = \exp(-ix_j\hat{P}_j) \mid x_j \in (-\infty, +\infty)\} \quad (13)$$

博弈结束后，经过算子  $\hat{J}(\gamma)^+$  作用，最终状态为：

$$|\varphi_f\rangle = \hat{J}(\gamma)^+(\hat{D}_0 \otimes \hat{D}_1 \otimes \hat{D}_2) \cdot \hat{J}(\gamma)(|vac\rangle_0 \otimes |vac\rangle_1 \otimes |vac\rangle_2) \quad (14)$$

经过测量装置，博弈者的量子策略与价格之间的关系为：

$$p_0(x_0, x_1, x_2) = x_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^{3k}}{(3k)!} + x_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^{3k+2}}{(3k+2)!} + x_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^{3k+1}}{(3k+1)!} \quad (15)$$

$$p_1(x_0, x_1, x_2) = x_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^{3k+1}}{(3k+1)!} + x_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^{3k}}{(3k)!} + x_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^{3k+2}}{(3k+2)!} \quad (16)$$

$$p_2(x_0, x_1, x_2) = x_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^{3k+2}}{(3k+2)!} + x_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^{3k+1}}{(3k+1)!} + x_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^{3k}}{(3k)!} \quad (17)$$

其中  $\gamma$  是量子博弈的纠缠度， $x_0$ 、 $x_1$  和  $x_2$  代表量子博弈策略集的策略，

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^{3k}}{(3k)!} = \frac{1}{3} \left[ e^\gamma + 2e^{-\frac{\gamma}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma\right) \right] \quad (18)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^{3k+1}}{(3k+1)!} = \frac{1}{3} \left[ e^\gamma - 2e^{-\frac{\gamma}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma\right) \right] \quad (19)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^{3k+2}}{(3k+2)!} = \frac{1}{3} \left[ e^\gamma - 2e^{-\frac{\gamma}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma\right) \right] \quad (20)$$

为简化算式，令  $f_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^{3k}}{(3k)!}$ 、 $f_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^{3k+1}}{(3k+1)!}$ 、 $f_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^{3k+2}}{(3k+2)!}$ ，因此博弈者的量子策略与价格之间的关系为：

$$p_0(x_0, x_1, x_2) = x_0 f_0 + x_1 f_2 + x_2 f_1 \quad (21)$$

$$p_1(x_0, x_1, x_2) = x_0 f_1 + x_1 f_0 + x_2 f_2 \quad (22)$$

$$p_2(x_0, x_1, x_2) = x_0 f_2 + x_1 f_1 + x_2 f_0 \quad (23)$$

### 3.1 量子博弈的分散式决策

将量子策略与价格的关系 (21)、(22)、(23) 式代入 (1)、(2)、(3) 式可得零售商  $T$  及制造商  $M_1$ 、 $M_2$  的需求函数：

$$Q_0 = a_0 + x_0(-b_1 f_0 + \alpha f_1 + \alpha \beta f_2) + x_1(-b_1 f_2 + \alpha f_0 + \alpha \beta f_1) + x_2(-b_1 f_1 + \alpha f_2 + \alpha \beta f_0) + b_1 v \quad (24)$$

$$Q_1 = a_1 + x_0(-b_1 f_1 + \alpha f_0 + \beta f_2) + x_1(-b_1 f_0 + \alpha f_2 + \beta f_1) + x_2(-b_1 f_2 + \alpha f_1 + \beta f_0) - \alpha v \quad (25)$$

$$Q_2 = a_2 + x_0(-b_2 f_2 + \alpha \beta f_0 + \beta f_1) + x_1(-b_2 f_1 + \alpha \beta f_2 + \beta f_0) + x_2(-b_2 f_0 + \alpha \beta f_1 + \beta f_2) - \alpha \beta v \quad (26)$$

分散式决策下，假设零售商  $T$  及制造商  $M_1$ 、 $M_2$  具有同等的价格决策地位，以自身利润最大化进行量子博弈，最优价格分别以  $p_0^*$ 、 $p_1^*$ 、 $p_2^*$  表示。

**定理 1.** 分散式决策下，若对于  $i = 1, 2$ ，满足条件：

$$(b_i + 1)f_0 > (f_0 + f_1 + f_2) = e^\gamma \quad (27)$$

及  $|B| \neq 0$ ，则零售商  $T$  及制造商  $M_1$ 、 $M_2$  的量子博弈最优价格如下：

$$p_0^* = \frac{1}{|B|} \{ [-(\beta^2 - 4b_1 b_2)L_1 + \alpha((\beta^2 + 2b_2)L_2 + \beta(1 + 2b_1)L_3)]f_0^2 - [(2\beta(\alpha b_1 + b_2)f_1 + 2(\beta b_1 + \alpha b_2)f_2)L_1 + \alpha\beta((\alpha f_1 + f_2)L_2 + (\alpha f_2 + \beta f_1)L_3)]f_0 + \beta(\alpha f_1 + f_2)(\beta f_1 + \alpha f_2)L_1 \} \quad (28)$$

$$p_1^* = \frac{1}{|B|} \{ [\alpha(\beta^2 + 2b_2)L_1 - (\alpha^2 \beta^2 - 4b_1 b_2)L_2 + \beta(\alpha^2 + 2b_1)L_3]f_0^2 - [\alpha f_1(\alpha \beta L_1 + 2(\beta b_1 + b_2)L_2 + \beta L_3) + \beta f_2(\alpha L_1 + 2(b_1 + \alpha b_2)L_2 + \alpha \beta L_3)]f_0 + \alpha \beta (\alpha f_1 + f_2)(f_1 + \beta f_2)L_2 \} \quad (29)$$

$$p_2^* = \frac{1}{|B|} \{ [\alpha \beta (1 + 2b_1)L_1 + \beta(\alpha^2 + 2b_1)L_2 - (\alpha^2 - 4b_1^2)L_3]f_0^2 - [\alpha f_2(\alpha \beta L_1 + \beta^2 L_2 + 2(1 + \beta)b_1 L_3) + f_1(\alpha \beta^2 L_1 + \alpha \beta L_2 + 2(\alpha + \beta)b_1 L_3)]f_0 + \alpha(\beta f_1 + \alpha f_2)(f_1 + \beta f_2)L_3 \} \quad (30)$$

其中  $|B|$  为矩阵  $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}$  之行列式值，

$$|B| = \{ 2 [ (1 + \alpha^2)\beta^2 b_1 - 4b_1^2 b_2 + \alpha^2(\beta^2 + b_2) ] f_0^3 - [ (\alpha \beta (\alpha^2 + \beta + \alpha \beta^2) - 4\alpha \beta b_1^2 - 4(\alpha + \beta)b_1 b_2) f_1 + (\alpha \beta (\alpha + \alpha^2 \beta + \beta^2) - 4\beta b_1^2 - 4\alpha(1 + \beta)b_1 b_2) f_2 ] f_0^2 - 2[ \alpha b_2(\beta f_1 + \alpha f_2)(f_1 + \beta f_2) + \beta b_1(\alpha f_1 + f_2)((\alpha + \beta)f_1 + \alpha(1 + \beta)f_2) ] f_0 + \alpha \beta (\alpha f_1 + f_2)(\beta f_1 + \alpha f_2)(f_1 + \beta f_2) \} \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
B_{11} &= -2f_0(b_1f_0 - \alpha f_1 - \alpha\beta f_2) \\
B_{12} &= -2b_1f_0f_2 + \alpha(f_0^2 + f_1f_2) + \alpha\beta(f_0f_1 + f_2^2) \\
B_{13} &= -2b_1f_0f_1 + \alpha(f_0f_2 + f_1^2) + \alpha\beta(f_0^2 + f_1f_2) \\
B_{21} &= -2b_1f_0f_1 + \alpha(f_0^2 + f_1f_2) + \beta(f_0f_2 + f_1^2) \\
B_{22} &= -2f_0(b_1f_0 - \alpha f_2 - \beta f_1) \\
B_{23} &= -2b_1f_0f_2 + \alpha(f_0f_1 + f_2^2) + \beta(f_0^2 + f_1f_2) \\
B_{31} &= -2b_2f_0f_2 + \alpha\beta(f_0^2 + f_1f_2) + \beta(f_0f_1 + f_2^2) \\
B_{32} &= -2b_2f_0f_1 + \alpha\beta(f_0f_2 + f_1^2) + \beta(f_0^2 + f_1f_2) \\
B_{33} &= -2f_0(b_2f_0 - \alpha\beta f_1 - \beta f_2) \\
L_1 &= -f_0a_0 - f_0b_1v + \omega(-b_1f_0 + \alpha f_1 + \alpha\beta f_2) \\
L_2 &= -(\omega - c_1)(-b_1f_2 + \alpha f_0 + \alpha\beta f_1) - f_0a_1 + f_0\alpha v + c_1(-b_1f_0 + \alpha f_2 + \beta f_1) \\
L_3 &= -f_0a_2 + \alpha\beta f_0v + c_2(-b_2f_0 + \alpha\beta f_1 + \beta f_2)
\end{aligned}$$

定理 1. 的证明见附录。

注：当量子纠缠度  $\gamma \rightarrow \infty$  时，最优价格保持收敛如下。

$$\begin{aligned}
p_0^* &= \frac{-1}{C} \{2b_1^2(v + \omega)(\beta + \alpha\beta - 2b_2) \\
&\quad + 2b_1b_2[-2a_0 + v(\alpha + \beta) + \omega(\beta + 2\alpha(2 + \beta))] - 2\alpha c_1 - \alpha\beta c_2 \\
&\quad + \beta b_1[\alpha(v(-1 - \beta + \alpha(-1 + 2\beta)) - 2\omega(1 + \alpha)(2 + \beta) \\
&\quad + 2(1 + \alpha - \beta)c_1 + 2\beta(1 + \alpha)c_2) + 2(1 + \alpha)a_0 - 2\alpha a_2] \\
&\quad + b_2[\alpha(2\alpha(v - 2\omega) - 2\omega\beta(1 + 2\alpha + \beta) + 2(\beta + \alpha(2 + \beta))c_1 \\
&\quad + \beta(-1 + \alpha + \beta)c_2) + 2(\alpha + \beta)a_0 - 2\alpha a_1] \\
&\quad - \alpha\beta[\alpha(v - 2\omega)(1 + \alpha + \alpha\beta) + \alpha\beta(-2(v + \omega) + v\beta) \\
&\quad + (1 + \alpha + \beta)a_0 - (1 + \alpha - \beta)a_1 + (1 - \alpha - \beta)a_2 \\
&\quad + (2\alpha(1 + \alpha) + \beta(1 - \beta) + \alpha\beta(\alpha - \beta))c_1 \\
&\quad + (1 - \beta)\beta(-1 + \alpha + \beta)c_2]\} \tag{32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_1^* &= \frac{1}{C} \{-2b_1^2(\beta + \alpha\beta - 2b_2)(\omega - 2c_1) \\
&\quad + 2b_1b_2(-2a_1 + \alpha(v - 4\omega - 3\omega\beta) + 2(3\alpha + \beta + 2\alpha\beta)c_1 - \beta c_2) \\
&\quad + \beta b_1[2(1 + \alpha)a_1 + \alpha(2\omega(1 + \alpha)(2 + \beta) + v(-1 - \alpha + \beta)) \\
&\quad - 2(\beta + 3\alpha(1 + \beta) + \alpha^2(3 + \beta))c_1 + 2\beta(1 + \alpha)c_2] \\
&\quad + \alpha b_2[-2a_0 - 2(1 + \beta)a_1 - 2\alpha(1 + \beta)(v - (\omega + 2\beta))v\alpha\beta \\
&\quad - 2(1 + \beta)(\beta + \alpha(2 + \beta))c_1 + \beta(1 - \alpha + \beta)c_2] \\
&\quad - \alpha\beta[(1 + \alpha - \beta)a_0 - (1 + \alpha + \beta)a_1 + (1 - \alpha + \beta)a_2 \\
&\quad + \alpha(-2\omega(1 + \alpha) + v(1 + \alpha - \beta))(1 + \beta) \\
&\quad + (\beta(1 + \beta) + \alpha^2(2 + \beta) + \alpha(2 + 4\beta + \beta^2))c_1 \\
&\quad - \beta(1 + \alpha)(1 - \alpha + \beta)c_2]\} \tag{33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_2^* = \frac{1}{C} \{ & 2b_1^2[-2a_2 + \beta(\omega + v\alpha - \omega\alpha) \\
& -2\beta c_1 + (2\beta(1 + \alpha) - 2b_2)c_2] + 2b_1b_2(\beta + \alpha(2 + \beta))c_2 \\
& -b_1[-2\alpha\beta\omega(-1 + \alpha)(2 + \beta) + \alpha\beta v(-1 + \beta + \alpha(3 + 2\beta))] \\
& -2(\beta + 3\alpha(1 + \beta) + \alpha^2(3 + \beta))c_1 + 2\beta(1 + \alpha)c_2 \\
& + 2\alpha\beta a_0 + 2\beta a_1 - 2(2\alpha + \beta + \alpha\beta)a_2] - \alpha\beta b_2[(1 + \alpha + \beta)c_2] \\
& + \alpha\beta[(-1 + \alpha + \beta)a_0 + (1 - \alpha + \beta)a_1 - (1 - \alpha - \beta)a_2 \\
& + \alpha(1 + \beta)(-2\omega(-1 + \alpha) + v(-1 + \alpha + \beta))] \\
& + (-\beta(1 + \beta) + \alpha^2(2 + \beta) - \alpha(2 + 2\beta + \beta^2))c_1 \\
& + \beta(1 + \alpha)(1 + \alpha + \beta)c_2 \} \tag{34}
\end{aligned}$$

其中：

$$\begin{aligned}
C = & 4b_1^2(\beta + \alpha\beta - 2b_2) - 4b_1[\alpha\beta(1 + \alpha + \beta) - (\beta + \alpha(2 + \beta))b_2] \\
& + 2\alpha\beta(2\alpha\beta - (1 + \alpha + \beta)b_2)
\end{aligned}$$

### 3.2 量子博弈下的集中式决策

集中式决策下，零售商  $T$  与制造商  $M_1$  作为一个整体，以供应链的利润  $\pi_{SC1}$  最大化为目标与制造商  $M_2$  的供应链进行量子博弈，最优价格分别以  $p_0^{c*}$ 、 $p_1^{c*}$ 、 $p_2^{c*}$  表示。

**定理 2.** 集中式决策下，对于  $j = 0, 1, 2$ ，若满足条件：

$$(b_1 + 1)f_j > f_0 + f_1 + f_2 = e^{\gamma} \tag{35}$$

矩阵  $\hat{B}$  为正定，且其行列式值  $|\hat{B}| \neq 0$ ，则零售商  $T$  与制造商  $M_1$  的供应链和制造商  $M_2$  的供应链进行量子博弈，最优价格如下：

$$\begin{aligned}
p_0^{c*} = \frac{1}{|\hat{B}|} \{ & f_0 \hat{L}_1(\hat{B}_{22}\hat{B}_{33} - \hat{B}_{23}\hat{B}_{32}) \\
& + f_0 \hat{L}_2(\hat{B}_{13}\hat{B}_{32} - \hat{B}_{12}\hat{B}_{33}) + f_0 \hat{L}_3(\hat{B}_{12}\hat{B}_{23} - \hat{B}_{22}\hat{B}_{13}) \\
& + [f_2 \hat{L}_1(\hat{B}_{23}\hat{B}_{31} - \hat{B}_{21}\hat{B}_{33}) + f_2 \hat{L}_2(\hat{B}_{11}\hat{B}_{33} - \hat{B}_{13}\hat{B}_{31}) \\
& + f_2 \hat{L}_3(\hat{B}_{13}\hat{B}_{21} - \hat{B}_{11}\hat{B}_{23}) + f_1 \hat{L}_1(\hat{B}_{21}\hat{B}_{32} - \hat{B}_{22}\hat{B}_{31})] \\
& + f_1 \hat{L}_2(\hat{B}_{12}\hat{B}_{31} - \hat{B}_{11}\hat{B}_{32}) + f_1 \hat{L}_3(\hat{B}_{11}\hat{B}_{22} - \hat{B}_{12}\hat{B}_{21}) \} \tag{36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_1^{c*} = \frac{1}{|\hat{B}|} \{ & [f_1 \hat{L}_1(\hat{B}_{22}\hat{B}_{33} - \hat{B}_{23}\hat{B}_{32}) \\
& + f_1 \hat{L}_2(\hat{B}_{13}\hat{B}_{32} - \hat{B}_{12}\hat{B}_{33}) + f_1 \hat{L}_3(\hat{B}_{12}\hat{B}_{23} - \hat{B}_{22}\hat{B}_{13})] \\
& + [f_0 \hat{L}_1(\hat{B}_{23}\hat{B}_{31} - \hat{B}_{21}\hat{B}_{33}) + f_0 \hat{L}_2(\hat{B}_{11}\hat{B}_{33} - \hat{B}_{13}\hat{B}_{31}) \\
& + f_0 \hat{L}_3(\hat{B}_{13}\hat{B}_{21} - \hat{B}_{11}\hat{B}_{23})] + [f_2 \hat{L}_1(\hat{B}_{21}\hat{B}_{32} - \hat{B}_{22}\hat{B}_{31}) \\
& + f_2 \hat{L}_2(\hat{B}_{12}\hat{B}_{31} - \hat{B}_{11}\hat{B}_{32}) + f_2 \hat{L}_3(\hat{B}_{11}\hat{B}_{22} - \hat{B}_{12}\hat{B}_{21})] \} \tag{37}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_2^{c*} = \frac{1}{|B|} & \{ [f_2 \hat{L}_1 (\hat{B}_{22} \hat{B}_{33} - \hat{B}_{23} \hat{B}_{32}) \\
& + f_2 \hat{L}_2 (\hat{B}_{13} \hat{B}_{32} - \hat{B}_{12} \hat{B}_{33}) + f_2 \hat{L}_3 (\hat{B}_{12} \hat{B}_{23} - \hat{B}_{22} \hat{B}_{13})] \\
& + [f_1 \hat{L}_1 (\hat{B}_{23} \hat{B}_{31} - \hat{B}_{21} \hat{B}_{33}) + f_1 \hat{L}_2 (\hat{B}_{11} \hat{B}_{33} - \hat{B}_{13} \hat{B}_{31}) \\
& + f_1 \hat{L}_3 (\hat{B}_{13} \hat{B}_{21} - \hat{B}_{11} \hat{B}_{23})] + [f_0 \hat{L}_1 (\hat{B}_{21} \hat{B}_{32} - \hat{B}_{22} \hat{B}_{31}) \\
& + f_0 \hat{L}_2 (\hat{B}_{12} \hat{B}_{31} - \hat{B}_{11} \hat{B}_{32}) + f_0 \hat{L}_3 (\hat{B}_{11} \hat{B}_{22} - \hat{B}_{12} \hat{B}_{21})] \} \quad (38)
\end{aligned}$$

其中  $|B|$  为矩阵  $\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_{11} & \hat{B}_{12} & \hat{B}_{13} \\ \hat{B}_{21} & \hat{B}_{22} & \hat{B}_{23} \\ \hat{B}_{31} & \hat{B}_{32} & \hat{B}_{33} \end{bmatrix}$  之行列式值，

$$\begin{aligned}
\hat{B}_{11} &= 2b_1(f_0^2 + f_1^2) - 4\alpha f_0 f_1 - 2\beta(\alpha f_0 f_2 + f_1 f_2) \\
\hat{B}_{12} &= 2b_1(f_0 f_1 + f_0 f_2) - 2\alpha(f_0^2 + f_1 f_2) - \beta(\alpha(f_0 f_1 + f_2^2) + (f_0 f_2 + f_1^2)) \\
\hat{B}_{13} &= 2b_1(f_0 f_1 + f_1 f_2) - 2\alpha(f_0 f_2 + f_1^2) - \beta(\alpha(f_0^2 + f_1 f_2) + (f_2^2 + f_0 f_1)) \\
\hat{B}_{21} &= 2b_1(f_0 f_1 + f_0 f_2) - 2\alpha(f_0^2 + f_1 f_2) - \beta(\alpha(f_2^2 + f_0 f_1) + (f_1^2 + f_0 f_2)) \\
\hat{B}_{22} &= 2b_1(f_0^2 + f_2^2) - 4\alpha f_0 f_2 - 2\beta(f_0 f_1 + \alpha f_1 f_2) \\
\hat{B}_{23} &= 2b_1(f_0 f_2 + f_1 f_2) - 2\alpha(f_0 f_1 + f_2^2) - \beta(\alpha(f_1^2 + f_0 f_2) + (f_0^2 + f_1 f_2)) \\
\hat{B}_{31} &= 2b_2 f_0 f_2 - \alpha\beta(f_0^2 + f_1 f_2) - \beta(f_0 f_1 + f_2^2) \\
\hat{B}_{32} &= 2b_2 f_0 f_1 - \alpha\beta(f_0 f_2 + f_1^2) - \beta(f_0^2 + f_1 f_2) \\
\hat{B}_{33} &= 2b_2 f_0^2 - 2\alpha\beta f_0 f_1 - 2\beta f_0 f_2 \\
\hat{L}_1 &= f_0(a_0 - c_1\alpha + b_1 v + b_1 c_1) + f_1(a_1 + b_1 c_1 - \alpha v - c_1\alpha) + f_2(-\beta c_1 - \alpha\beta c_1) \\
\hat{L}_2 &= f_0(a_1 - c_1\alpha - \alpha v + b_1 c_1) + f_1(-\beta c_1 - \alpha\beta c_1) + f_2(a_0 + b_1 c_1 + b_1 v - c_1\alpha) \\
\hat{L}_3 &= f_0(a_2 - \alpha\beta v + b_2 c_2) - \alpha\beta c_2 f_1 - \beta c_2 f_2
\end{aligned}$$

定理 2. 的证明见附录。

注：当  $\gamma \rightarrow \infty$  时，随着供应链 sc<sub>1</sub> 和供应链 sc<sub>2</sub> 之间的量子纠缠度越大，若满足条件：

$$\beta + \alpha\beta - b_2 < 0$$

则量子博弈模型集中式决策的最优价格收敛为：

$$p_0^{c*} = p_1^{c*} = p_2^{c*} = \frac{v\alpha\beta - a_2 + (\beta + \alpha\beta - b_2)c_2}{2(\beta + \alpha\beta - b_2)}$$

意即当供应链 sc<sub>1</sub> 和 sc<sub>2</sub> 之间的量子纠缠度趋于无穷，任一个博弈方的价格变动都将造成另一方的价格瞬间变动，这种急速变动终将使得两个供应链的价格趋于一致；并且供应链 sc<sub>1</sub> 中不论零售商  $T$  或制造商  $M_1$  的价格变动都会瞬间造成供应链 sc<sub>2</sub> 的价格变动，从而影响供应链 sc<sub>1</sub> 中另一方的价格变动，因此最终形成零售商  $T$ 、制造商  $M_1$  和制造商  $M_2$  的价格趋于一致。

#### 4. 数值分析

为了比较经典博弈和量子博弈在分散式与集中式决策模型的定价与所获利润，并了解量子博弈模型各参数对各博弈方最优定价与最优利润的影响，借助 Mathematica 软件以数值方法进行模拟，研究模型参数取值如表 1 所示。

表1. 量子博弈模型的参数取值

符号	取值	符号	取值
製造商 $M_1$ 零售渠道的潜在市场规模 $a_0$	150	製造商 $M_2$ 网络渠道的潜在市场规模 $a_2$	130
製造商 $M_1$ 网络渠道的潜在市场规模 $a_1$	120	$M_2$ 产品成本 $c_2$	9
$M_1$ 产品成本 $c_1$	10	$M_2$ 品牌忠诚度 $B_2$	0.7
$M_1$ 零售渠道产品批发价 $\omega$	15	$M_2$ 顾客保持成本 $\delta_2$	2.3
$M_1$ 零售商的单位服务成本 $\eta$	1.5	$M_2$ 顾客感知价值 $\gamma_2$	1.2
$M_1$ 零售商的服务水平 $v$	2	$M_2$ 误差项 $\varepsilon_2$	0.04
$M_1$ 品牌忠诚度 $B_1$	0.8	量子纠缠度 $\gamma$	3.5
$M_1$ 顾客保持成本 $\delta_1$	2.5	渠道交叉弹性系数 $\alpha$	0.5
$M_1$ 顾客感知价值 $\gamma_1$	1.2	品牌交叉弹性系数 $\beta$	0.4
$M_1$ 误差项 $\varepsilon_1$	0.05		

资料来源：本文自行整理

#### 4.1 量子博弈与经典博弈的比较

将表 1 的参数带入模型，计算后可以得到量子博弈分散式与集中式决策的最优定价和最优利润，如表 2 所示。

比较量子博弈分散式决策与集中式决策的最优定价及最优利润，可以发现：分散式决策下，两个品牌製造商的供应链最优利润低于集中式决策下的供应链最优利润，意即分散式决策供应链的整体效率不如集中式决策供应链的整体效率。集中式决策下製造商  $M_1$  的零售渠道与网络渠道以供应链的利润最大化为目标，因此零售渠道与网络渠道可视为一个整体，在供应链整体考虑下，零售渠道与网络渠道的价格将会有一方降低而另一方提高，导致消费者购买的渠道发生改变，甚至品牌忠诚度不高的消费者转而购买另一品牌，但整体而言供应链的利润仍然高于分散式决策的供应链利润。

表2. 量子博弈分散式与集中式决策的最优定价和最优利润（取  $\gamma = 3.5$ ）

分散式决策		集中式决策	
项目与符号	计算结果	项目与符号	计算结果
$M_1$ 零售渠道最优定价 $p_0^*$	49.40	$M_1$ 零售渠道最优定价 $p_0^{c*}$	47.88
$M_1$ 网络渠道最优定价 $p_1^*$	40.96	$M_1$ 网络渠道最优定价 $p_1^{c*}$	42.44
$M_2$ 网络渠道最优定价 $p_2^*$	37.66	$M_2$ 网络渠道最优定价 $p_2^{c*}$	37.72
$M_1$ 零售渠道最优利润 $\pi_0^*$	2,084.53	$M_1$ 零售渠道最优利润 $\pi_0^{c*}$	2,140.78
$M_1$ 网络渠道最优利润 $\pi_1^*$	2,079.81	$M_1$ 网络渠道最优利润 $\pi_1^{c*}$	2,044.63
$M_2$ 网络渠道最优利润 $\pi_2^*$	1,646.13	$M_2$ 网络渠道最优利润 $\pi_2^{c*}$	1,653.27
品牌1供应链最优利润 $\pi_{sc1}^*$	4,164.34	品牌1供应链最优利润 $\pi_{sc1}^{c*}$	4,184.40
品牌2供应链最优利润 $\pi_{sc2}^*$	1,646.13	品牌2供应链最优利润 $\pi_{sc2}^{c*}$	1,653.27

资料来源：本文自行整理

## 4.2 品牌忠诚度对最优利润的影响

探究分散式决策与集中式决策各参数变化对最优价格与最优利润的影响，有利拟定改善策略并形成决策。分散式决策下，制造商  $M_1$  与  $M_2$  的各自品牌忠诚度  $B_1$  与  $B_2$  对最优利润的影响如图 3、图 4。当其他参数固定时， $M_1$  的品牌忠诚度  $B_1$  高于某一数值（约 0.13）时，制造商  $M_1$  零售渠道与网络渠道的最优利润  $\pi_0^*$ 、 $\pi_1^*$  与供应链最优利润  $\pi_{sc1}^*$  是品牌忠诚度  $B_1$  的增函数，随着品牌忠诚度  $B_1$  的提高，最优利润将会跟着提高。 $M_2$  的品牌忠诚度  $B_2$  高于某一数值（约 0.13）时，制造商  $M_2$  的最优利润  $\pi_2^*$  与供应链最优利润  $\pi_{sc2}^*$  是品牌忠诚度  $B_2$  的增函数，随着品牌忠诚度  $B_2$  的提高，最优利润将会跟着提高。

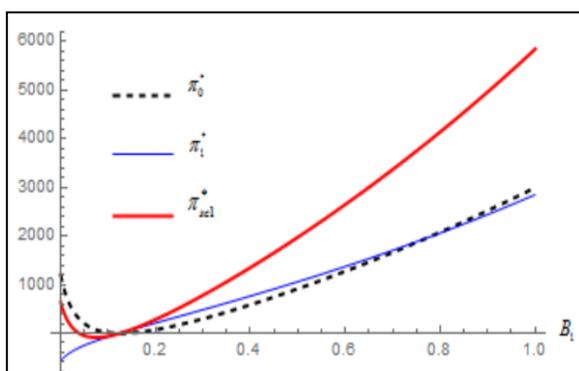


图 3. 品牌 1 忠诚度对分散式决策最优利润的影响

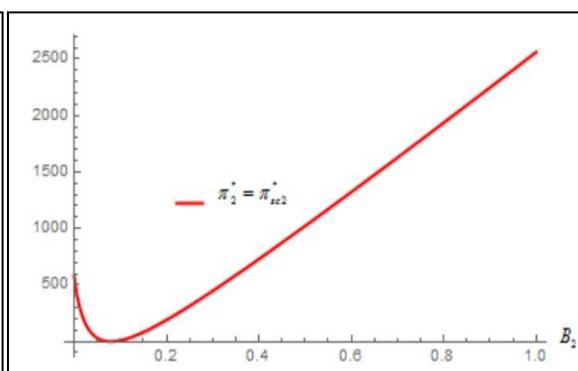


图 4. 品牌 2 忠诚度对分散式决策最优利润的影响

集中式决策下制造商  $M_1$  与  $M_2$  的各自品牌忠诚度  $B_1$  与  $B_2$  对最优利润的影响如图 5、图 6。当其他参数固定时，集中式决策下制造商  $M_1$  与  $M_2$  的供应链最优利润  $\pi_{sc1}^{C*}$ 、 $\pi_{sc2}^{C*}$  是各自品牌忠诚度  $B_1$ 、 $B_2$  的增函数，随着品牌忠诚度的提高，供应链最优利润将会跟着提高。

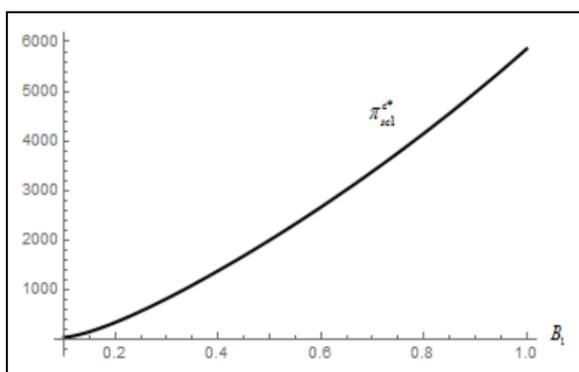


图 5. 品牌 1 忠诚度对分散式决策最优利润的影响

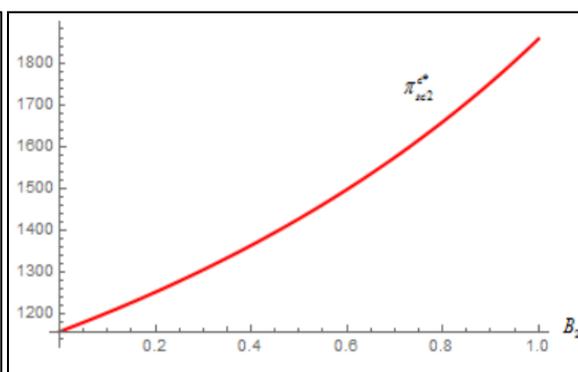


图 6. 品牌 2 忠诚度对分散式决策最优利润的影响

## 4.3 渠道交叉系数与品牌交叉系数对最优利润的影响

分散式决策下渠道交叉系数  $\alpha$  与品牌交叉系数  $\beta$  对最优利润的影响如图 7；集中式决策下渠道交叉系数  $\alpha$  与品牌交叉系数  $\beta$  对最优利润的影响如图 8。由图 7 可知，分散式决策下制造商  $M_1$  零售渠道与网络渠道的最优利润  $\pi_0^*$ 、 $\pi_1^*$ ，与制造商  $M_2$  的最优利润  $\pi_2^*$  是渠道交叉系数  $\alpha$  的增函数，也是品牌交叉系数  $\beta$  的增函

数，并且渠道交叉系数  $\alpha$  的影响比品牌交叉系数  $\beta$  更显著。由图 8 可知，集中式决策下，制造商  $M_1$  供应链的最优利润  $\pi_{sc1}^{c*}$  与制造商  $M_2$  供应链的最优利润  $\pi_{sc2}^{c*}$ ，是渠道交叉系数  $\alpha$  的增函数，也是品牌交叉系数  $\beta$  的增函数，并且渠道交叉系数  $\alpha$  的影响比品牌交叉系数  $\beta$  更显著。

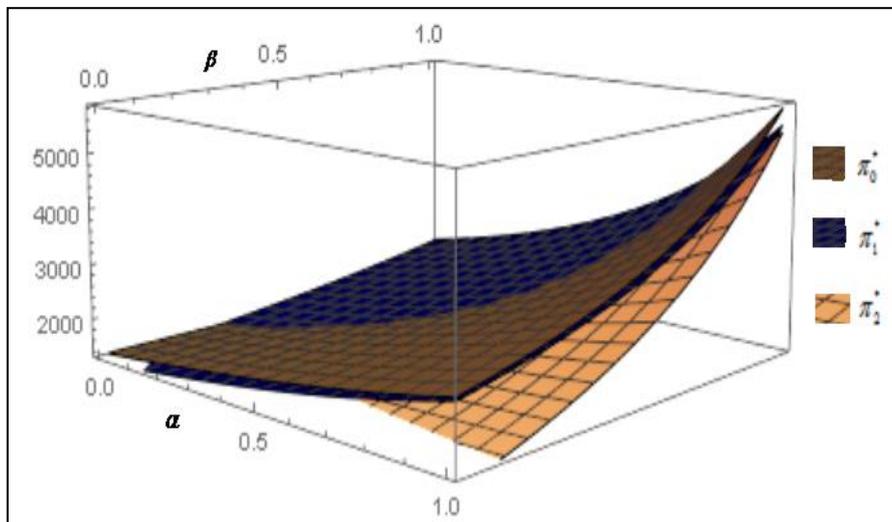


图 7. 渠道交叉系数与品牌交叉系数对分散式决策最优价格的影响

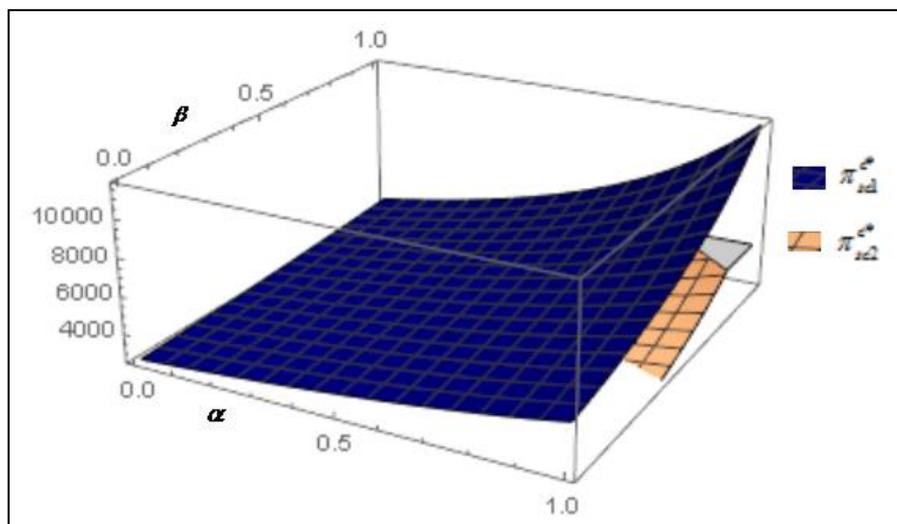


图 8. 渠道交叉系数对分散式决策最优利润的影响

## 5. 结语

制造商  $M_1$  与  $M_2$  品牌竞争下，两制造商之间存在竞合关系，制造商  $M_1$  的网络渠道与零售渠道也存在竞合关系，这些相互之间的竞合关系形成了量子纠缠的现象。从量子博弈的观点来看制造商  $M_1$  与  $M_2$  品牌竞争下的定价，发现不论是在分散式决策下还是在集中式决策下，当量子纠缠度  $\gamma > 0$  时，量子博弈的最优价格与最优利润皆存在；当量子纠缠度  $\gamma$  改变，量子博弈决策的定价亦随之改变。随着量子纠缠度越大，当  $\gamma \rightarrow \infty$  时，量子博弈的最优价格最后保持收敛。

在管理上的意义如下：由于量子纠缠度代表的是制造商  $M_1$  与  $M_2$  之间，及  $M_1$  双渠道供应链的网络渠道与零售渠道之间的竞合关系，随着量子纠缠度增加，最优利

润会有所提高；亦即当某一博弈方拟订策略后，若其它博弈方随之调整策略的速度越快，则越能使各博弈方的最优利润提高。量子博弈模型的计算较经典模型复杂且计算量庞大，在管理决策上必须借助编程或数学计算机软件来进行。由数值模拟分析，品牌忠诚度高于某一数值后，最优利润是品牌忠诚度的增函数，随着品牌忠诚度的提高，最优利润将会跟着提高，因此拟订策略提高品牌忠诚度，将有助于提高获利。

### 参考文献

1. 王虹、周晶 (2010)。竞争和风险规避对双渠道供应链决策的影响。管理科学，23(1)，10-17。
2. 申成然、熊中楷、晏伟 (2014)。网络比价行为下双渠道定价及协调策略研究。中国管理科学，22(1)，84-93。
3. 马鹏、王海燕 (2015)。促销努力竞争情形下双渠道供应链协调策略。工业工程，18(4)，85-91。
4. 王晓锋、凡友荣、段永瑞、宁绍英 (2015)。考虑品牌竞争的双渠道供应链定价策略研究。工业工程与管理，20(3)，36-43。
5. 李景峰、张文静、毋江波 (2017)。传统品牌与网货品牌竞争下的多渠道供应链定价研究。工业技术经济，36(3)，107-115。
6. 张有中 (2020)。双渠道供应链定价的量子博弈。工业工程与管理，25(5)，145-153。
7. 路晓伟、蒋馥 (2005)。CRM 中客户忠诚对价格敏感性的影响研究。管理工程学报，1，74-76。
8. Banker, R. D., Khosla, I., & Sinha, K. K. (1998). Quality and competition. *Management Science*, 44(9), 1179-1192.
9. Chen, Y. C., Fang, S. C., & Wen, U. P. (2013). Pricing policies for substitutable products in a supply chain with internet and traditional channels. *European Journal of Operational Research*, 224(3), 542-551.
10. Chiang, W., & Hess, C. (2003). Direct marketing, indirect profits: A strategic analysis of dual-channel supply chain design. *Management Science*, 49(1), 1-20.
11. Eisert, J., Wilkens, M., & Lewenstein, M. (1999). Quantum games and quantum strategies. *Physical Review Letters*, 83(15), 3077-3080.
12. Erdem, T., Swait, J., & Louviere, J. (2002). The impact of brand credibility on consumer price sensitivity. *International Journal of Research in Marketing*, 19(1), 1-19.
13. Kurata, H., Yao, D. Q., & Liu, J. J. (2007). Pricing policies under direct vs. indirect channel competition and national vs. store brand competition. *European Journal of Operational Research*, 180(1), 262-281.
14. Meyer, D. A. (1999). Quantum strategies. *Physical Review Letters*, 82(5), 1052-1055.
15. Wei, H., & Swaminathan, J. M. (2009). Introduction of a second channel: Implications for pricing and profits. *European Journal of Operational Research*, 194(1), 258-279.
16. Yan, R. (2011). Managing channel coordination in a multi-channel manufacturer-retailer supply chain. *Industrial Marketing Management*, 40(4), 636-642.
17. Yan, R., Guo, P., Wang, J., & Amrouche, N. (2011). Product distribution and coordination strategies in a multi-channel context. *Journal of Retailing and Consumer Services*, 18(1), 19-26.
18. Yao, D. Q., & Liu, J. J. (2005). Competitive pricing of mixed retail and e-tail distribution channels. *Omega*, 33(3), 235-247.

附录：

定理 1 的证明

将 (21) - (26) 式代入 (4)、(5)、(6) 式可得零售商  $T$  及制造商  $M_1$ 、 $M_2$  的利润函数，根据利润函数的一阶导数条件  $\frac{\partial \pi_j}{\partial x_j} = 0, j = 0, 1, 2$ ，可得  $BX = L$ ，亦即：

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix}$$

其中，

$$\begin{aligned} B_{11} &= -2f_0(b_1f_0 - \alpha f_1 - \alpha\beta f_2) \\ B_{12} &= -2b_1f_0f_2 + \alpha(f_0^2 + f_1f_2) + \alpha\beta(f_0f_1 + f_2^2) \\ B_{13} &= -2b_1f_0f_1 + \alpha(f_0f_2 + f_1^2) + \alpha\beta(f_0^2 + f_1f_2) \\ B_{21} &= -2b_1f_0f_1 + \alpha(f_0^2 + f_1f_2) + \beta(f_0f_2 + f_1^2) \\ B_{22} &= -2f_0(b_1f_0 - \alpha f_2 - \beta f_1) \\ B_{23} &= -2b_1f_0f_2 + \alpha(f_0f_1 + f_2^2) + \beta(f_0^2 + f_1f_2) \\ B_{31} &= -2b_2f_0f_2 + \alpha\beta(f_0^2 + f_1f_2) + \beta(f_0f_1 + f_2^2) \\ B_{32} &= -2b_2f_0f_1 + \alpha\beta(f_0f_2 + f_1^2) + \beta(f_0^2 + f_1f_2) \\ B_{33} &= -2f_0(b_2f_0 - \alpha\beta f_1 - \beta f_2) \\ L_1 &= -f_0a_0 - f_0b_1v + \omega(-b_1f_0 + \alpha f_1 + \alpha\beta f_2) \\ L_2 &= -(\omega - c_1)(-b_1f_2 + \alpha f_0 + \alpha\beta f_1) - f_0a_1 + f_0\alpha v + c_1(-b_1f_0 + \alpha f_2 + \beta f_1) \\ L_3 &= -f_0a_2 + \alpha\beta f_0v + c_2(-b_2f_0 + \alpha\beta f_1 + \beta f_2) \end{aligned}$$

由假设条件 (27) 式，各博弈方利润函数的二阶导数为：

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \pi_0}{\partial x_0^2} &= -2f_0(b_1f_0 - \alpha f_1 - \alpha\beta f_2) < -2f_0(b_1f_0 - f_1 - f_2) < 0 \\ \frac{\partial^2 \pi_1}{\partial x_1^2} &= -2f_0(b_1f_0 - \alpha f_2 - \beta f_1) < -2f_0(b_1f_0 - f_1 - f_2) < 0 \\ \frac{\partial^2 \pi_2}{\partial x_2^2} &= -2f_0(b_2f_0 - \alpha\beta f_1 - \beta f_2) < -2f_0(b_2f_0 - f_1 - f_2) < 0 \end{aligned}$$

证明了 Nash 均衡解的存在。因为  $f_0^3 + f_1^3 + f_2^3 - 3f_0f_1f_2 = 1$ ，可得：

$$\begin{aligned} |B| &= (f_0^3 + f_1^3 + f_2^3 - 3f_0f_1f_2) \{ 2 [(1 + \alpha^2)\beta^2 b_1 - 4b_1^2 b_2 + \alpha^2(\beta^2 + b_2)] f_0^3 \\ &\quad - [(\alpha\beta(\alpha^2 + \beta + \alpha\beta^2) - 4\alpha\beta b_1^2 - 4(\alpha + \beta)b_1 b_2) f_1 \\ &\quad + (\alpha\beta(\alpha + \alpha^2\beta + \beta^2) - 4\beta b_1^2 - 4\alpha(1 + \beta)b_1 b_2) f_2] f_0^2 \\ &\quad - 2 [\alpha b_2(\beta f_1 + \alpha f_2)(f_1 + \beta f_2) \\ &\quad + \beta b_1(\alpha f_1 + f_2)((\alpha + \beta)f_1 + \alpha(1 + \beta)f_2)] f_0 \\ &\quad + \alpha\beta(\alpha f_1 + f_2)(\beta f_1 + \alpha f_2)(f_1 + \beta f_2) \} \\ &= \{ 2 [(1 + \alpha^2)\beta^2 b_1 - 4b_1^2 b_2 + \alpha^2(\beta^2 + b_2)] f_0^3 \\ &\quad - [(\alpha\beta(\alpha^2 + \beta + \alpha\beta^2) - 4\alpha\beta b_1^2 - 4(\alpha + \beta)b_1 b_2) f_1 \\ &\quad + (\alpha\beta(\alpha + \alpha^2\beta + \beta^2) - 4\beta b_1^2 - 4\alpha(1 + \beta)b_1 b_2) f_2] f_0^2 \\ &\quad - 2 [\alpha b_2(\beta f_1 + \alpha f_2)(f_1 + \beta f_2) \\ &\quad + \beta b_1(\alpha f_1 + f_2)((\alpha + \beta)f_1 + \alpha(1 + \beta)f_2)] f_0 \\ &\quad + \alpha\beta(\alpha f_1 + f_2)(\beta f_1 + \alpha f_2)(f_1 + \beta f_2) \} \end{aligned}$$

若 $|B| \neq 0$ ，应用克莱姆法则（Cramer's Rule），可得最佳策略解：

$$\begin{aligned} x_0^* &= \frac{1}{|B|} \{L_1(B_{22}B_{33} - B_{23}B_{32}) + L_2(B_{32}B_{13} - B_{12}B_{33}) + L_3(B_{12}B_{23} - B_{13}B_{22})\}x_1^* \\ &= \frac{1}{|B|} \{L_1(B_{23}B_{31} - B_{21}B_{33}) + L_2(B_{11}B_{33} - B_{13}B_{31}) + L_3(B_{21}B_{13} - B_{11}B_{23})\} \\ x_2^* &= \frac{1}{|B|} \{L_1(B_{21}B_{32} - B_{22}B_{31}) + L_2(B_{12}B_{31} - B_{11}B_{32}) + L_3(B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21})\} \end{aligned}$$

因此量子博弈中的策略解  $x_0^*$ 、 $x_1^*$  和  $x_2^*$ ，使各博弈方具有最大利润。将策略解代入（21）、（22）和（23）式，可得各博弈方量子博弈的最优价格如定理 1 证毕。

### 定理 2 的证明

证明：方法如定理 1，此处不再赘述。

收稿日期：2021-05-06  
责任编辑、校对：庄斯淇、陈虹酉