

品牌競爭下雙渠道供應鏈的量子博弈 Quantum Game of Dual-Channel Supply Chain under Brand Competition

張有中¹ 王秀雯^{2*}
Yu-Chung Chang Xiu-Wen Wang

摘要

本文基於量子博弈的觀點，考慮一個製造商通過網絡直銷與零售雙渠道供應鏈銷售產品，同時存在另一製造商僅通過網絡直銷渠道銷售可替代產品，探討品牌競爭下三個博弈方的定價策略。製造商間及雙渠道供應鏈之間的競合關係，可以視為一個量子糾纏現象，不論是在分散式或集中式決策下，當量子糾纏度大於零時，各博弈方量子博弈的最優利潤皆高於經典博弈；當量子糾纏度趨於無窮時，量子博弈的最優價格與最優利潤最後保持收斂，因此量子博弈理論是優於經典博弈理論的決策方法。數值模擬證明，分散決策降低了供應鏈的整體效率；各博弈方的最優利潤是渠道交叉係數與品牌交叉係數的增函數，並且相對於品牌競爭，渠道競爭對雙渠道供應鏈的影響更顯著；當品牌忠誠度高於某一數值後，各博弈方的最優利潤是品牌忠誠度的增函數。

關鍵詞：量子博弈、經典博弈、雙渠道供應鏈、量子糾纏度、定價

Abstract

Based on the perspective of quantum games, this article studies the pricing strategies under brand competition among three game players, which are one manufacturer selling a product through an Internet and a retailer channels while another manufacturer selling a substitute product only through the Internet channel. The competitive relationship among three game players can be regarded as a quantum entanglement phenomenon. No matter under decentralized decision-making or centralized decision-making, each game player's optimal profit of quantum game is higher than that of classical game when the quantum entanglement is greater than zero. When the quantum entanglement approaches infinity, the optimal price and optimal profit of the quantum game finally converge. The numerical analysis shows that decentralized decision-making reduces the overall efficiency of the supply chain. The optimal profit of each player is an increasing function of the channel cross-price elasticity coefficient and the brand cross-price elasticity coefficient. Furthermore, for the dual-channel supply chain, channel competition has a greater impact than brand competition. When brand loyalty is higher than a certain value, the optimal profit of each player is an increasing function of brand loyalty.

Keywords: Quantum Game, Classical Game, Dual-channel Supply Chain, Quantum Entanglement, Pricing

¹ 廈門大學嘉庚學院管理學院副教授

² 廈門大學嘉庚學院信息科學與技術學院講師 wxwwang@xujc.com*通訊作者

* 基金項目：廈門大學嘉庚學院校級孵化項目（YM2019L06）

1. 引言

電子商務的蓬勃發展促使網絡消費模式的普及，傳統的零售模式已不再能滿足消費者的購物需求，各製造商紛紛開闢網絡直銷渠道，不僅使得零售渠道和網絡直銷渠道並存的雙渠道模式供應鏈迅速發展，更促使完全或主要以網絡為銷售中心，利用互聯網打造的網貨品牌的興起，對傳統品牌形成衝擊，品牌和渠道的競爭日益激烈。

國內外學者對雙渠道供應鏈的研究已有很多成果，而定價決策問題一直是其中最廣泛被研究的問題 (Chiang & Hess, 2003)。Yao 與 Liu (2005) 研究雙渠道中定價決策問題的 Bertrand 和 Stackelberg 模型；王虹與周晶 (2010) 研究競爭和非競爭環境下，風險規避決策者的雙渠道供應鏈定價問題；申成然等(2014)針對比價行為下，部分消費者優先在網絡渠道購買產品的現象，對雙渠道供應鏈的定價決策及協調策略問題進行研究，並構建單渠道和雙渠道的供應鏈決策模型；Yan 等 (2011) 研究雙渠道供應鏈下的產品配送和協調問題，發現製造商可以通過其在線渠道和傳統渠道銷售相同的品牌，採用具有利潤協調的合作結構，以最大化渠道利潤的整體分配；馬鵬與王海燕 (2015) 研究需求依賴於促銷努力水平下的供應鏈優化協調問題，並探討集中式供應鏈和分散式供應鏈模型的協調策略；在分散式模型中，改進批發價格契約，使零售商向製造商批發商品的總支付額符合特定條件，則批發價格契約可以實現雙渠道供應鏈的協調。

在雙渠道供應鏈的品牌競爭和渠道競爭方面，Kurata 等 (2007) 研究傳統品牌與零售商自有品牌雙渠道供應鏈競爭的定價策略，並以漲價契約來實現供應鏈的協調；Yan (2011) 證明儘管差異化品牌可以有效地減弱渠道競爭和衝突，但它不能達到完全協調；王曉鋒等 (2015) 研究品牌競爭的雙渠道供應鏈定價策略，發現各博弈方的最優定價是關於品牌忠誠度的增函數；李景峰等 (2017) 發現搭便車行為對零售商不利，各博弈方的最優定價是關於渠道間及品牌間交叉價格彈性係數的增函數，且渠道競爭的影響顯著高於品牌競爭。

目前研究雙渠道供應鏈定價決策及協調策略問題的方法，大多採用 Stackelberg 經典博弈模型和 Bertrand 經典博弈模型。Meyer (1999) 將經典博弈與量子信息理論結合起來，形成了量子博弈理論，並發現一個使用量子策略的博弈者，總是能夠擊敗使用經典策略的對手；Eisert 等 (1999) 將量子策略引入囚徒困境模型，並利用量子糾纏消除了其中的兩難困境。雙渠道供應鏈的製造商與零售商之間存在競爭與合作的關係，這種競合關係形成了量子糾纏的現象；隨著雙方競合加劇，量子糾纏度增加，要如何進行定價以獲得最優利潤，形成了一個比經典博弈的決策理論更加複雜的問題，因為每一個量子糾纏度都會對應一個經典博弈的決策問題。張有中 (2020) 引入量子博弈理論，研究一個製造商雙渠道供應鏈定價的問題，建立了雙渠道供應鏈定價的量子博弈模型。當零售商與製造商的量子糾纏度為零時，量子博弈決策的定價與經典博弈的定價相同；當量子糾纏度趨於無窮時，量子博弈的最優價格仍然保持收斂。本文基於學者對雙渠道供應鏈的研究成果，考慮品牌競爭下兩個製造商雙渠道供應鏈定價的量子博弈模型，並探討品牌忠誠度對定價的影響，最後與經典博弈模型進行比較。

2. 雙渠道供應鏈模型

2.1 問題描述

考慮如圖 1 的供應鏈結構，由兩個品牌的製造商及一個零售商所組成。製造商 M_1 擁有雙渠道供應鏈，以零售渠道透過零售商 T 販賣產品，並以網絡直銷渠道販賣產

品。假設產品的生產成本為 c_1 ，零售商 T 進貨的批發價為 ω ，零售渠道販賣價格為 p_0 ，網絡渠道販賣價格為 p_1 。製造商 M_2 的產品與製造商 M_1 的產品可相互替代， M_2 產品的生產成本為 c_2 ，且僅在網絡渠道以 p_2 價格販賣。各品牌的品牌忠誠度為 B_i ， $0 \leq B_i \leq 1$ ， $i = 1, 2$ 。

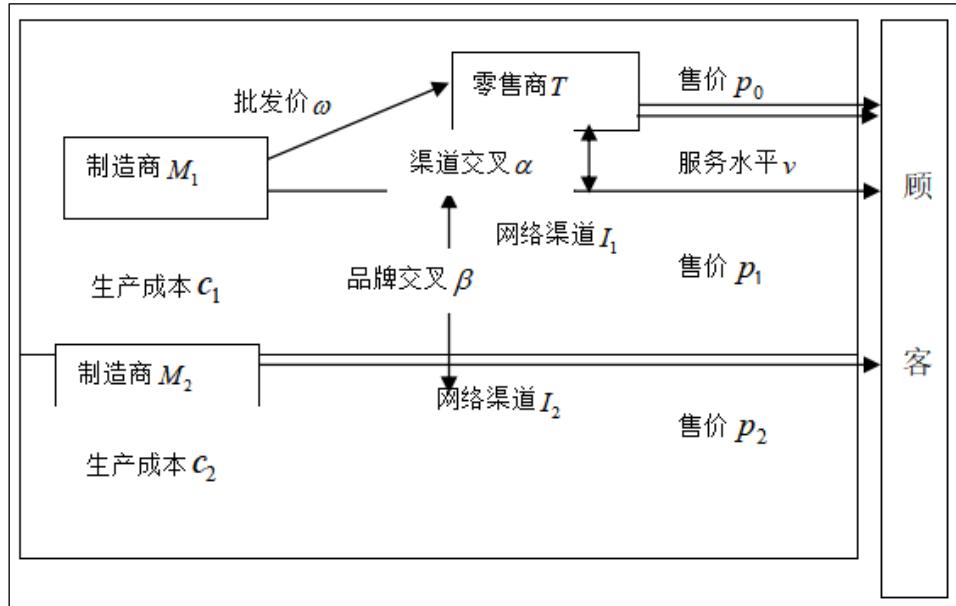


圖 1. 考慮品牌競爭的雙渠道供應鏈結構

2.2 基本假設

為了使模型更加嚴謹，作如下假設：

假設 1：製造商與零售商都是理性經理人，為了保證企業的基本營利狀態，假設

$$0 < c_1 < \omega < p_0, p_1, 0 < c_2 < p_2;$$

假設 2：假設 α 為雙渠道供應鏈中的渠道交叉彈性係數，代表雙渠道供應鏈中某種渠道的產品需求量，對另一渠道產品價格變動的反應靈敏程度，因此 $0 < \alpha < 1$ ；

假設 3：因為零售渠道提供更多種類的服務，例如現場講解、產品體驗等，因此假設只有零售渠道提供服務，網絡渠道不提供服務，零售商 T 對產品提供的服務水平 v 需付出的成本為 $c(v) = \frac{1}{2}\eta v^2$ ，其中 $\eta > 0$ 為零售商 T 對產品的單位服務成本 (Chen 等, 2013)；

假設 4：假設 β 為品牌交叉價格彈性係數，代表在同一種銷售渠道中，某種品牌的產品需求量對另一種品牌的同質性產品價格變動的反應靈敏程度，體現了品牌競爭的激烈程度，因此 $0 < \beta < 1$ 。

2.3 需求函數

本文主要參考王曉鋒等 (2015) 考慮品牌競爭的需求函數，它是綜合 Banker 等 (1988)、Wei 與 Swaminathan (2009) 文獻中採用的基於價格、服務敏感的線性需求函數，以及品牌信譽和消費者價格敏感度關係的相關文獻 (Erdem 等, 2002) 所建立的需求函數。零售商 T 及製造商 M_1, M_2 的需求函數，分別如下：

$$Q_0 = a_0 - \frac{\delta_1}{\gamma_1 B_1 + \varepsilon_1} (p_0 - v) + \alpha p_1 + \alpha\beta p_2 \quad (1)$$

$$Q_1 = a_1 - \frac{\delta_1}{\gamma_1 B_1 + \varepsilon_1} p_1 + \alpha (p_0 - v) + \beta p_2 \quad (2)$$

$$Q_2 = a_2 - \frac{\delta_2}{\gamma_2 B_2 + \varepsilon_2} p_2 + \alpha\beta (p_0 - v) + \beta p_1 \quad (3)$$

其中 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 分別代表品牌 1 產品在零售渠道的需求、品牌 1 產品在網絡渠道的需求及品牌 2 產品的需求。假設 a_j 為正數並且是穩定的，代表與 Q_j 相對應的潛在市場規模， $j = 0, 1, 2$ 。令 $b_i = \frac{\delta_i}{\gamma_i B_i + \varepsilon_i} > 1$ ，代表消費者對某品牌的自價格敏感度 ($i = 1$ 代表品牌 1、 $i = 2$ 代表品牌 2)，其中 δ_i 為產品的顧客保持成本， γ_i 為顧客感知價值， ε_i 為誤差項 (Erdem 等，2002；路曉偉與蔣馥，2005)， $\delta_i, \gamma_i, \varepsilon_i > 0$ 。

2.4 利潤函數

根據問題描述、基本假設和需求函數，零售商 T 及製造商 M_1, M_2 的總利潤函數 π_0, π_1, π_2 分別如下：

$$\pi_0 = (p_0 - \omega) Q_0 - \frac{1}{2} \eta v^2 \quad (4)$$

$$\pi_1 = (\omega - c_1) Q_0 + (p_1 - c_1) Q_1 \quad (5)$$

$$\pi_2 = (p_2 - c_2) Q_2 \quad (6)$$

零售商 T 及製造商 M_1 的供應鏈整體利潤 π_{SC1} 與製造商 M_2 的供應鏈整體利潤 π_{SC2} 為：

$$\pi_{SC1} = (p_1 - c_1) Q_1 + (p_0 - c_1) Q_0 - \frac{1}{2} \eta v^2 \quad (7)$$

$$\pi_{SC2} = \pi_2 = (p_2 - c_2) Q_2 \quad (8)$$

3. 量子模型

考慮量子化模型如圖 2，由基向量生成的 Hilbert 空間稱為一個量子比特，它是同一時刻各個狀態的疊加，量子比特的張量積可以表示博奕在每個時刻的狀態。

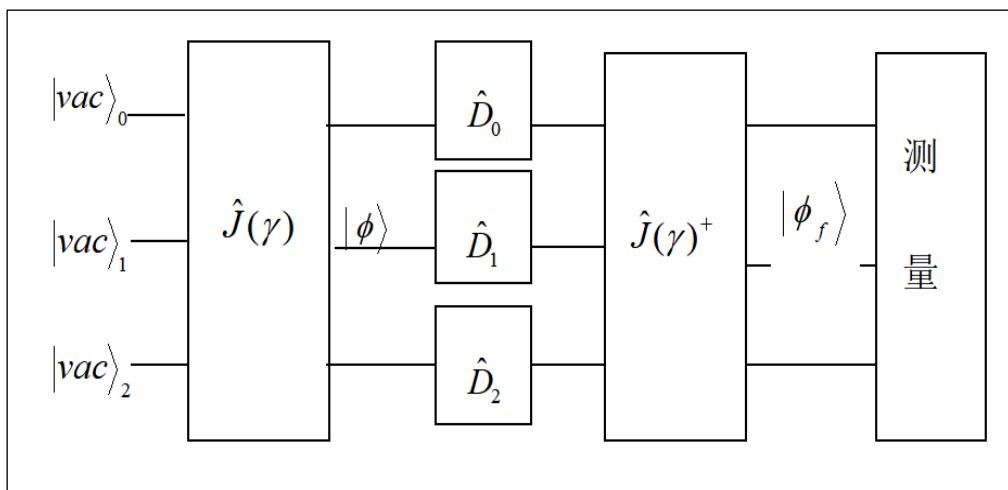


圖 2. 品牌競爭下雙渠道供應鏈的量子結構

假設零售商 T 及製造商 M_1, M_2 的博奕從量子態：

$$|vac\rangle_0 \otimes |vac\rangle_1 \otimes |vac\rangle_2 \quad (9)$$

開始，初始狀態通過一個特定的麼正算子 $\hat{J}(\gamma)$ 作用，使初始狀態轉化為新的量子糾纏狀態：

$$|\varphi\rangle = \hat{J}(\gamma)(|vac\rangle_0 \otimes |vac\rangle_1 \otimes |vac\rangle_2) \quad (10)$$

麼正算子定義為：

$$\hat{J}(\gamma) = \exp\{i\gamma(\hat{X}_0\hat{P}_1 + \hat{X}_1\hat{P}_2 + \hat{X}_2\hat{P}_0)\} \quad (11)$$

其中 $\hat{X}_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_j^+ + \hat{a}_j)$ ， $\hat{P}_j = \frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{a}_j^+ - \hat{a}_j)$ ， $i = \sqrt{-1}$ ， $j = 0, 1, 2$ 。

量子糾纏狀態經過博奕者在策略集 S_j ($j = 0, 1, 2$)中選擇不同策略，策略算子以麼正算子 $\hat{D}_0, \hat{D}_1, \hat{D}_2$ 表示，其中：

$$\hat{D}_j(x_j) = \exp(-ix_j\hat{P}_j) \quad (12)$$

$$S_j = \{\hat{D}_j(x_j) = \exp(-ix_j\hat{P}_j) \mid x_j \in (-\infty, +\infty)\} \quad (13)$$

博奕結束後，經過算子 $\hat{J}(\gamma)^+$ 作用，最終狀態為：

$$|\varphi_f\rangle = \hat{J}(\gamma)^+(\hat{D}_0 \otimes \hat{D}_1 \otimes \hat{D}_2) \cdot \hat{J}(\gamma)(|vac\rangle_0 \otimes |vac\rangle_1 \otimes |vac\rangle_2) \quad (14)$$

經過測量裝置，博奕者的量子策略與價格之間的關係為：

$$p_0(x_0, x_1, x_2) = x_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^{3k}}{(3k)!} + x_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^{3k+2}}{(3k+2)!} + x_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^{3k+1}}{(3k+1)!} \quad (15)$$

$$p_1(x_0, x_1, x_2) = x_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^{3k+1}}{(3k+1)!} + x_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^{3k}}{(3k)!} + x_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^{3k+2}}{(3k+2)!} \quad (16)$$

$$p_2(x_0, x_1, x_2) = x_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^{3k+2}}{(3k+2)!} + x_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^{3k+1}}{(3k+1)!} + x_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^{3k}}{(3k)!} \quad (17)$$

其中 γ 是量子博奕的糾纏度， x_0, x_1 和 x_2 代表量子博奕策略集的策略，

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^{3k}}{(3k)!} = \frac{1}{3} \left[e^{\gamma} + 2e^{-\frac{r}{2}} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma \right) \right] \quad (18)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^{3k+1}}{(3k+1)!} = \frac{1}{3} \left[e^{\gamma} - 2e^{-\frac{r}{2}} \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma \right) \right] \quad (19)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^{3k+2}}{(3k+2)!} = \frac{1}{3} \left[e^{\gamma} - 2e^{-\frac{r}{2}} \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma \right) \right] \quad (20)$$

為簡化算式，令 $f_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^{3k}}{(3k)!}$ 、 $f_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^{3k+1}}{(3k+1)!}$ 、 $f_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^{3k+2}}{(3k+2)!}$ ，因此博奕者的量子策略與價格之間的關係為：

$$p_0(x_0, x_1, x_2) = x_0 f_0 + x_1 f_2 + x_2 f_1 \quad (21)$$

$$p_1(x_0, x_1, x_2) = x_0 f_1 + x_1 f_0 + x_2 f_2 \quad (22)$$

$$p_2(x_0, x_1, x_2) = x_0 f_2 + x_1 f_1 + x_2 f_0 \quad (23)$$

3.1 量子博弈的分散式決策

將量子策略與價格的關係 (21)、(22)、(23) 式代入 (1)、(2)、(3) 式可得零售商 T 及製造商 M_1 、 M_2 的需求函數：

$$Q_0 = a_0 + x_0(-b_1 f_0 + \alpha f_1 + \alpha \beta f_2) + x_1(-b_1 f_2 + \alpha f_0 + \alpha \beta f_1) + x_2(-b_1 f_1 + \alpha f_2 + \alpha \beta f_0) + b_1 v \quad (24)$$

$$Q_1 = a_1 + x_0(-b_1 f_1 + \alpha f_0 + \beta f_2) + x_1(-b_1 f_0 + \alpha f_2 + \beta f_1) + x_2(-b_1 f_2 + \alpha f_1 + \beta f_0) - \alpha v \quad (25)$$

$$Q_2 = a_2 + x_0(-b_2 f_2 + \alpha \beta f_0 + \beta f_1) + x_1(-b_2 f_1 + \alpha \beta f_2 + \beta f_0) + x_2(-b_2 f_0 + \alpha \beta f_1 + \beta f_2) - \alpha \beta v \quad (26)$$

分散式決策下，假設零售商 T 及製造商 M_1 、 M_2 具有同等的價格決策地位，以自身利潤最大化進行量子博弈，最優價格分別以 p_0^* 、 p_1^* 、 p_2^* 表示。

定理 1. 分散式決策下，若對於 $i = 1, 2$ ，滿足條件：

$$(b_i + 1)f_0 > (f_0 + f_1 + f_2) = e^r \quad (27)$$

及 $|B| \neq 0$ ，則零售商 T 及製造商 M_1 、 M_2 的量子博弈最優價格如下：

$$p_0^* = \frac{1}{|B|} \{ [-(\beta^2 - 4b_1 b_2)L_1 + \alpha((\beta^2 + 2b_2)L_2 + \beta(1 + 2b_1)L_3)]f_0^2 - [(2\beta(\alpha b_1 + b_2)f_1 + 2(\beta b_1 + \alpha b_2)f_2)L_1 + \alpha\beta((\alpha f_1 + f_2)L_2 + (\alpha f_2 + \beta f_1)L_3)]f_0 + \beta(\alpha f_1 + f_2)(\beta f_1 + \alpha f_2)L_1 \} \quad (28)$$

$$p_1^* = \frac{1}{|B|} \{ [\alpha(\beta^2 + 2b_2)L_1 - (\alpha^2\beta^2 - 4b_1 b_2)L_2 + \beta(\alpha^2 + 2b_1)L_3]f_0^2 - [\alpha f_1(\alpha\beta L_1 + 2(\beta b_1 + b_2)L_2 + \beta L_3) + \beta f_2(\alpha L_1 + 2(b_1 + \alpha b_2)L_2 + \alpha\beta L_3)]f_0 + \alpha\beta(\alpha f_1 + f_2)(f_1 + \beta f_2)L_2 \} \quad (29)$$

$$p_2^* = \frac{1}{|B|} \{ [\alpha\beta(1 + 2b_1)L_1 + \beta(\alpha^2 + 2b_1)L_2 - (\alpha^2 - 4b_1^2)L_3]f_0^2 - [\alpha f_2(\alpha\beta L_1 + \beta^2 L_2 + 2(1 + \beta)b_1 L_3) + f_1(\alpha\beta^2 L_1 + \alpha\beta L_2 + 2(\alpha + \beta)b_1 L_3)]f_0 + \alpha(\beta f_1 + \alpha f_2)(f_1 + \beta f_2)L_3 \} \quad (30)$$

其中 $|B|$ 為矩陣 $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}$ 之行列式值，

$$|B| = \{ 2[(1 + \alpha^2)\beta^2 b_1 - 4b_1^2 b_2 + \alpha^2(\beta^2 + b_2)]f_0^3 - [(\alpha\beta(\alpha^2 + \beta + \alpha\beta^2) - 4\alpha\beta b_1^2 - 4(\alpha + \beta)b_1 b_2)f_1 + (\alpha\beta(\alpha + \alpha^2\beta + \beta^2) - 4\beta b_1^2 - 4\alpha(1 + \beta)b_1 b_2)f_2]f_0^2 - 2[\alpha b_2(\beta f_1 + \alpha f_2)(f_1 + \beta f_2) + \beta b_1(\alpha f_1 + f_2)((\alpha + \beta)f_1 + \alpha(1 + \beta)f_2)]f_0 + \alpha\beta(\alpha f_1 + f_2)(\beta f_1 + \alpha f_2)(f_1 + \beta f_2) \} \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
B_{11} &= -2f_0(b_1f_0 - \alpha f_1 - \alpha\beta f_2) \\
B_{12} &= -2b_1f_0f_2 + \alpha(f_0^2 + f_1f_2) + \alpha\beta(f_0f_1 + f_2^2) \\
B_{13} &= -2b_1f_0f_1 + \alpha(f_0f_2 + f_1^2) + \alpha\beta(f_0^2 + f_1f_2) \\
B_{21} &= -2b_1f_0f_1 + \alpha(f_0^2 + f_1f_2) + \beta(f_0f_2 + f_1^2) \\
B_{22} &= -2f_0(b_1f_0 - \alpha f_2 - \beta f_1) \\
B_{23} &= -2b_1f_0f_2 + \alpha(f_0f_1 + f_2^2) + \beta(f_0^2 + f_1f_2) \\
B_{31} &= -2b_2f_0f_2 + \alpha\beta(f_0^2 + f_1f_2) + \beta(f_0f_1 + f_2^2) \\
B_{32} &= -2b_2f_0f_1 + \alpha\beta(f_0f_2 + f_1^2) + \beta(f_0^2 + f_1f_2) \\
B_{33} &= -2f_0(b_2f_0 - \alpha\beta f_1 - \beta f_2) \\
L_1 &= -f_0a_0 - f_0b_1v + \omega(-b_1f_0 + \alpha f_1 + \alpha\beta f_2) \\
L_2 &= -(\omega - c_1)(-b_1f_2 + \alpha f_0 + \alpha\beta f_1) - f_0a_1 + f_0\alpha v + c_1(-b_1f_0 + \alpha f_2 + \beta f_1) \\
L_3 &= -f_0a_2 + \alpha\beta f_0v + c_2(-b_2f_0 + \alpha\beta f_1 + \beta f_2)
\end{aligned}$$

定理 1. 的證明見附錄。

注：當量子糾纏度 $\gamma \rightarrow \infty$ 時，最優價格保持收斂如下。

$$\begin{aligned}
p_0^* &= \frac{-1}{C} \{ 2b_1^2(v + \omega)(\beta + \alpha\beta - 2b_2) \\
&\quad + 2b_1b_2[-2a_0 + v(\alpha + \beta) + \omega(\beta + 2\alpha(2 + \beta)) - 2\alpha c_1 - \alpha\beta c_2 \\
&\quad + \beta b_1[\alpha(v(-1 - \beta + \alpha(-1 + 2\beta)) - 2\omega(1 + \alpha)(2 + \beta) \\
&\quad + 2(1 + \alpha - \beta)c_1 + 2\beta(1 + \alpha)c_2) + 2(1 + \alpha)a_0 - 2\alpha a_2] \\
&\quad + b_2[\alpha(2\alpha(v - 2\omega) - 2\omega\beta(1 + 2\alpha + \beta) + 2(\beta + \alpha(2 + \beta))c_1 \\
&\quad + \beta(-1 + \alpha + \beta)c_2) + 2(\alpha + \beta)a_0 - 2\alpha a_1] \\
&\quad - \alpha\beta[\alpha(v - 2\omega)(1 + \alpha + \alpha\beta) + \alpha\beta(-2(v + \omega) + v\beta) \\
&\quad + (1 + \alpha + \beta)a_0 - (1 + \alpha - \beta)a_1 + (1 - \alpha - \beta)a_2 \\
&\quad + (2\alpha(1 + \alpha) + \beta(1 - \beta) + \alpha\beta(\alpha - \beta))c_1 \\
&\quad + (1 - \beta)\beta(-1 + \alpha + \beta)c_2] \} \tag{32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_1^* &= \frac{1}{C} \{ -2b_1^2(\beta + \alpha\beta - 2b_2)(\omega - 2c_1) \\
&\quad + 2b_1b_2(-2a_1 + \alpha(v - 4\omega - 3\omega\beta) + 2(3\alpha + \beta + 2\alpha\beta)c_1 - \beta c_2) \\
&\quad + \beta b_1[2(1 + \alpha)a_1 + \alpha(2\omega(1 + \alpha)(2 + \beta) + v(-1 - \alpha + \beta)) \\
&\quad - 2(\beta + 3\alpha(1 + \beta) + \alpha^2(3 + \beta))c_1 + 2\beta(1 + \alpha)c_2] \\
&\quad + \alpha b_2[-2a_0 - 2(1 + \beta)a_1 - 2\alpha(1 + \beta)(v - (\omega + 2\beta))v\alpha\beta \\
&\quad - 2(1 + \beta)(\beta + \alpha(2 + \beta))c_1 + \beta(1 - \alpha + \beta)c_2] \\
&\quad - \alpha\beta[(1 + \alpha - \beta)a_0 - (1 + \alpha + \beta)a_1 + (1 - \alpha + \beta)a_2 \\
&\quad + \alpha(-2\omega(1 + \alpha) + v(1 + \alpha - \beta))(1 + \beta) \\
&\quad + (\beta(1 + \beta) + \alpha^2(2 + \beta) + \alpha(2 + 4\beta + \beta^2))c_1 \\
&\quad - \beta(1 + \alpha)(1 - \alpha + \beta)c_2] \} \tag{33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_2^* = \frac{1}{C} \{ & 2b_1^2[-2a_2 + \beta(\omega + \nu\alpha - \omega\alpha) \\
& -2\beta c_1 + (2\beta(1 + \alpha) - 2b_2)c_2] + 2b_1 b_2 (\beta + \alpha(2 + \beta))c_2 \\
& -b_1[-2\alpha\beta\omega(-1 + \alpha)(2 + \beta) + \alpha\beta\nu(-1 + \beta + \alpha(3 + 2\beta)) \\
& -2(\beta + 3\alpha(1 + \beta) + \alpha^2(3 + \beta))c_1 + 2\beta(1 + \alpha)c_2 \\
& +2\alpha\beta a_0 + 2\beta a_1 - 2(2\alpha + \beta + \alpha\beta)a_2] - \alpha\beta b_2[(1 + \alpha + \beta)c_2] \\
& +\alpha\beta[(-1 + \alpha + \beta)a_0 + (1 - \alpha + \beta)a_1 - (1 - \alpha - \beta)a_2 \\
& +\alpha(1 + \beta)(-2\omega(-1 + \alpha) + \nu(-1 + \alpha + \beta)) \\
& +(-\beta(1 + \beta) + \alpha^2(2 + \beta) - \alpha(2 + 2\beta + \beta^2))c_1 \\
& +\beta(1 + \alpha)(1 + \alpha + \beta)c_2] \}
\end{aligned} \tag{34}$$

其中：

$$\begin{aligned}
C = & 4b_1^2(\beta + \alpha\beta - 2b_2) - 4b_1[\alpha\beta(1 + \alpha + \beta) - (\beta + \alpha(2 + \beta))b_2] \\
& +2\alpha\beta(2\alpha\beta - (1 + \alpha + \beta)b_2)
\end{aligned}$$

3.2 量子博奕下的集中式決策

集中式決策下，零售商 T 與製造商 M_1 作為一個整體，以供應鏈的利潤 π_{SC1} 最大化為目標與製造商 M_2 的供應鏈進行量子博奕，最優價格分別以 p_0^{c*} 、 p_1^{c*} 、 p_2^{c*} 表示。

定理 2. 集中式決策下，對於 $j = 0, 1, 2$ ，若滿足條件：

$$(b_1 + 1)f_j > f_0 + f_1 + f_2 = e^\gamma \tag{35}$$

矩陣 \hat{B} 為正定，且其行列式值 $|\hat{B}| \neq 0$ ，則零售商 T 與製造商 M_1 的供應鏈和製造商 M_2 的供應鏈進行量子博奕，最優價格如下：

$$\begin{aligned}
p_0^{c*} = \frac{1}{|B|} \{ & f_0 \hat{L}_1 (\hat{B}_{22}\hat{B}_{33} - \hat{B}_{23}\hat{B}_{32}) \\
& + f_0 \hat{L}_2 (\hat{B}_{13}\hat{B}_{32} - \hat{B}_{12}\hat{B}_{33}) + f_0 \hat{L}_3 (\hat{B}_{12}\hat{B}_{23} - \hat{B}_{22}\hat{B}_{13}) \\
& + [f_2 \hat{L}_1 (\hat{B}_{23}\hat{B}_{31} - \hat{B}_{21}\hat{B}_{33}) + f_2 \hat{L}_2 (\hat{B}_{11}\hat{B}_{33} - \hat{B}_{13}\hat{B}_{31}) \\
& + f_2 \hat{L}_3 (\hat{B}_{13}\hat{B}_{21} - \hat{B}_{11}\hat{B}_{23}) + f_1 \hat{L}_1 (\hat{B}_{21}\hat{B}_{32} - \hat{B}_{22}\hat{B}_{31})] \\
& + f_1 \hat{L}_2 (\hat{B}_{12}\hat{B}_{31} - \hat{B}_{11}\hat{B}_{32}) + f_1 \hat{L}_3 (\hat{B}_{11}\hat{B}_{22} - \hat{B}_{12}\hat{B}_{21}) \}
\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}
p_1^{c*} = \frac{1}{|B|} \{ & [f_1 \hat{L}_1 (\hat{B}_{22}\hat{B}_{33} - \hat{B}_{23}\hat{B}_{32}) \\
& + f_1 \hat{L}_2 (\hat{B}_{13}\hat{B}_{32} - \hat{B}_{12}\hat{B}_{33}) + f_1 \hat{L}_3 (\hat{B}_{12}\hat{B}_{23} - \hat{B}_{22}\hat{B}_{13})] \\
& + [f_0 \hat{L}_1 (\hat{B}_{23}\hat{B}_{31} - \hat{B}_{21}\hat{B}_{33}) + f_0 \hat{L}_2 (\hat{B}_{11}\hat{B}_{33} - \hat{B}_{13}\hat{B}_{31}) \\
& + f_0 \hat{L}_3 (\hat{B}_{13}\hat{B}_{21} - \hat{B}_{11}\hat{B}_{23})] + [f_2 \hat{L}_1 (\hat{B}_{21}\hat{B}_{32} - \hat{B}_{22}\hat{B}_{31}) \\
& + f_2 \hat{L}_2 (\hat{B}_{12}\hat{B}_{31} - \hat{B}_{11}\hat{B}_{32}) + f_2 \hat{L}_3 (\hat{B}_{11}\hat{B}_{22} - \hat{B}_{12}\hat{B}_{21})] \}
\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
p_2^{c*} = \frac{1}{|B|} \{ & [f_2 \hat{L}_1 (\hat{B}_{22} \hat{B}_{33} - \hat{B}_{23} \hat{B}_{32}) \\
& + f_2 \hat{L}_2 (\hat{B}_{13} \hat{B}_{32} - \hat{B}_{12} \hat{B}_{33}) + f_2 \hat{L}_3 (\hat{B}_{12} \hat{B}_{23} - \hat{B}_{22} \hat{B}_{13})] \\
& + [f_1 \hat{L}_1 (\hat{B}_{23} \hat{B}_{31} - \hat{B}_{21} \hat{B}_{33}) + f_1 \hat{L}_2 (\hat{B}_{11} \hat{B}_{33} - \hat{B}_{13} \hat{B}_{31}) \\
& + f_1 \hat{L}_3 (\hat{B}_{13} \hat{B}_{21} - \hat{B}_{11} \hat{B}_{23})] + [f_0 \hat{L}_1 (\hat{B}_{21} \hat{B}_{32} - \hat{B}_{22} \hat{B}_{31}) \\
& + f_0 \hat{L}_2 (\hat{B}_{12} \hat{B}_{31} - \hat{B}_{11} \hat{B}_{32}) + f_0 \hat{L}_3 (\hat{B}_{11} \hat{B}_{22} - \hat{B}_{12} \hat{B}_{21})] \}
\end{aligned} \tag{38}$$

其中 $|\hat{B}|$ 為矩陣 $\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_{11} & \hat{B}_{12} & \hat{B}_{13} \\ \hat{B}_{21} & \hat{B}_{22} & \hat{B}_{23} \\ \hat{B}_{31} & \hat{B}_{32} & \hat{B}_{33} \end{bmatrix}$ 之行列式值，

$$\begin{aligned}
\hat{B}_{11} &= 2b_1(f_0^2 + f_1^2) - 4\alpha f_0 f_1 - 2\beta (\alpha f_0 f_2 + f_1 f_2) \\
\hat{B}_{12} &= 2b_1(f_0 f_1 + f_0 f_2) - 2\alpha (f_0^2 + f_1 f_2) - \beta (\alpha (f_0 f_1 + f_2^2) + (f_0 f_2 + f_1^2)) \\
\hat{B}_{13} &= 2b_1(f_0 f_1 + f_1 f_2) - 2\alpha (f_0 f_2 + f_1^2) - \beta (\alpha (f_0^2 + f_1 f_2) + (f_2^2 + f_0 f_1)) \\
\hat{B}_{21} &= 2b_1(f_0 f_1 + f_0 f_2) - 2\alpha (f_0^2 + f_1 f_2) - \beta (\alpha (f_2^2 + f_0 f_1) + (f_1^2 + f_0 f_2)) \\
\hat{B}_{22} &= 2b_1(f_0^2 + f_2^2) - 4\alpha f_0 f_2 - 2\beta (f_0 f_1 + \alpha f_1 f_2) \\
\hat{B}_{23} &= 2b_1(f_0 f_2 + f_1 f_2) - 2\alpha (f_0 f_1 + f_2^2) - \beta (\alpha (f_1^2 + f_0 f_2) + (f_0^2 + f_1 f_2)) \\
\hat{B}_{31} &= 2b_2 f_0 f_2 - \alpha \beta (f_0^2 + f_1 f_2) - \beta (f_0 f_1 + f_2^2) \\
\hat{B}_{32} &= 2b_2 f_0 f_1 - \alpha \beta (f_0 f_2 + f_1^2) - \beta (f_0^2 + f_1 f_2) \\
\hat{B}_{33} &= 2b_2 f_0^2 - 2\alpha \beta f_0 f_1 - 2\beta f_0 f_2 \\
\hat{L}_1 &= f_0(a_0 - c_1 \alpha + b_1 \nu + b_1 c_1) + f_1(a_1 + b_1 c_1 - \alpha \nu - c_1 \alpha) + f_2(-\beta c_1 - \alpha \beta c_1) \\
\hat{L}_2 &= f_0(a_1 - c_1 \alpha - \alpha \nu + b_1 c_1) + f_1(-\beta c_1 - \alpha \beta c_1) + f_2(a_0 + b_1 c_1 + b_1 \nu - c_1 \alpha) \\
\hat{L}_3 &= f_0(a_2 - \alpha \beta \nu + b_2 c_2) - \alpha \beta c_2 f_1 - \beta c_2 f_2
\end{aligned}$$

定理 2. 的證明見附錄。

注：當 $\gamma \rightarrow \infty$ 時，隨著供應鏈 SC_1 和供應鏈 SC_2 之間的量子糾纏度越大，若滿足條件：

$$\beta + \alpha \beta - b_2 < 0$$

則量子博弈模型集中式決策的最優價格收斂為：

$$p_0^{c*} = p_1^{c*} = p_2^{c*} = \frac{\nu \alpha \beta - a_2 + (\beta + \alpha \beta - b_2) c_2}{2(\beta + \alpha \beta - b_2)}$$

意即當供應鏈 SC_1 和 SC_2 之間的量子糾纏度趨於無窮，任一個博弈方的價格變動都將造成另一方的價格瞬間變動，這種急遽變動終將使得兩個供應鏈的價格趨於一致；並且供應鏈 SC_1 中不論零售商 T 或製造商 M_1 的價格變動，都會瞬間造成供應鏈 SC_2 的價格變動，從而影響供應鏈 SC_1 中另一方的價格變動，因此最終形成零售商 T 、製造商 M_1 和製造商 M_2 的價格趨於一致。

4. 數值分析

為了比較經典博弈和量子博弈在分散式與集中式決策模型的定價與所獲利潤，並瞭解量子博弈模型各參數對各博弈方最優定價與最優利潤的影響，借助 Mathematica 軟件以數值方法進行模擬，研究模型參數取值如表 1 所示。

表1. 量子博弈模型的參數取值

符號	取值	符號	取值
製造商 M_1 零售渠道的潛在市場規模 a_0	150	製造商 M_2 網絡渠道的潛在市場規模 a_2	130
製造商 M_1 網絡渠道的潛在市場規模 a_1	120	M_2 產品成本 c_2	9
M_1 產品成本 c_1	10	M_2 品牌忠誠度 B_2	0.7
M_1 零售渠道產品批發價 ω	15	M_2 顧客保持成本 δ_2	2.3
M_1 零售商的單位服務成本 η	1.5	M_2 顧客感知價值 γ_2	1.2
M_1 零售商的服務水平 v	2	M_2 誤差項 ε_2	0.04
M_1 品牌忠誠度 B_1	0.8	量子糾纏度 γ	3.5
M_1 顧客保持成本 δ_1	2.5	渠道交叉彈性係數 α	0.5
M_1 顧客感知價值 γ_1	1.2	品牌交叉彈性係數 β	0.4
M_1 誤差項 ε_1	0.05		

資料來源：本文自行整理

4.1 量子博弈與經典博弈的比較

將表 1 的參數帶入模型，計算後可以得到量子博弈分散式與集中式決策的最優定價和最優利潤，如表 2 所示。

比較量子博弈分散式決策與集中式決策的最優定價及最優利潤，可以發現：分散式決策下，兩個品牌製造商的供應鏈最優利潤低於集中式決策下的供應鏈最優利潤，意即分散式決策供應鏈的整體效率不如集中式決策供應鏈的整體效率。集中式決策下製造商 M_1 的零售渠道與網絡渠道以供應鏈的利潤最大化為目標，因此零售渠道與網絡渠道可視為一個整體，在供應鏈整體考慮下，零售渠道與網絡渠道的價格將會有一方降低而另一方提高，導致消費者購買的渠道發生改變，甚至品牌忠誠度不高的消費者轉而購買另一品牌，但整體而言供應鏈的利潤仍然高於分散式決策的供應鏈利潤。

表2. 量子博弈分散式與集中式決策的最優定價和最優利潤（取 $\gamma = 3.5$ ）

分散式決策		集中式決策	
項目與符號	計算結果	項目與符號	計算結果
M_1 零售渠道最優定價 p_0^*	49.40	M_1 零售渠道最優定價 p_0^{C*}	47.88
M_1 網絡渠道最優定價 p_1^*	40.96	M_1 網絡渠道最優定價 p_1^{C*}	42.44
M_2 網絡渠道最優定價 p_2^*	37.66	M_2 網絡渠道最優定價 p_2^{C*}	37.72
M_1 零售渠道最優利潤 π_0^*	2,084.53	M_1 零售渠道最優利潤 π_0^{C*}	2,140.78
M_1 網絡渠道最優利潤 π_1^*	2,079.81	M_1 網絡渠道最優利潤 π_1^{C*}	2,044.63
M_2 網絡渠道最優利潤 π_2^*	1,646.13	M_2 網絡渠道最優利潤 π_2^{C*}	1,653.27
品牌1供應鏈最優利潤 π_{sc1}^*	4,164.34	品牌1供應鏈最優利潤 π_{sc1}^{C*}	4,184.40
品牌2供應鏈最優利潤 π_{sc2}^*	1,646.13	品牌2供應鏈最優利潤 π_{sc2}^{C*}	1,653.27

資料來源：本文自行整理

4.2 品牌忠誠度對最優利潤的影響

探究分散式決策與集中式決策各參數變化對最優價格與最優利潤的影響，有利擬定改善策略並形成決策。分散式決策下，製造商 M_1 與 M_2 的各自品牌忠誠度 B_1 與 B_2 對最優利潤的影響如圖 3、圖 4。當其他參數固定時， M_1 的品牌忠誠度 B_1 高於某一數值（約 0.13）時，製造商 M_1 零售渠道與網絡渠道的最優利潤 π_0^* 、 π_1^* 與供應鏈最優利潤 π_{sc1}^* 是品牌忠誠度 B_1 的增函數，隨著品牌忠誠度 B_1 的提高，最優利潤將會跟著提高。 M_2 的品牌忠誠度 B_2 高於某一數值（約 0.13）時，製造商 M_2 的最優利潤 π_2^* 與供應鏈最優利潤 π_{sc2}^* 是品牌忠誠度 B_2 的增函數，隨著品牌忠誠度 B_2 的提高，最優利潤將會跟著提高。

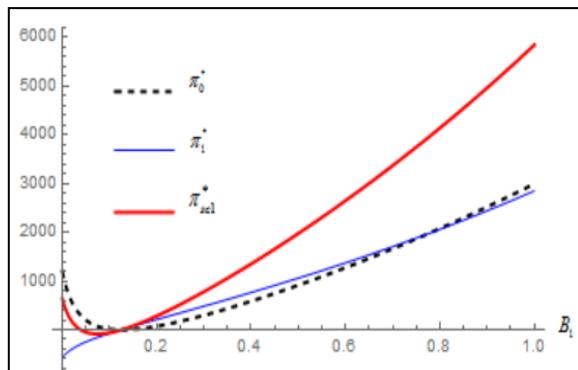


圖 3. 品牌 1 忠誠度對分散式決策最優利潤的影響

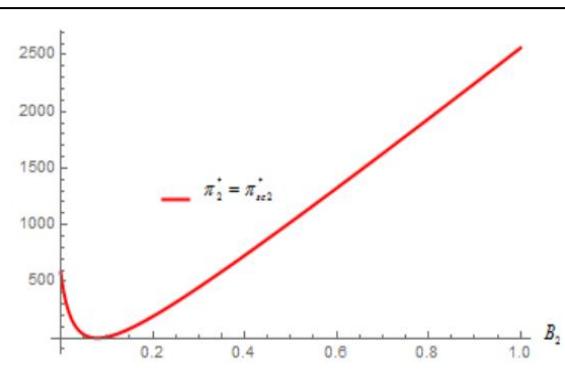


圖 4. 品牌 2 忠誠度對分散式決策最優利潤的影響

集中式決策下製造商 M_1 與 M_2 的各自品牌忠誠度 B_1 與 B_2 對最優利潤的影響如圖 5、圖 6。當其他參數固定時，集中式決策下製造商 M_1 與 M_2 的供應鏈最優利潤 π_{sc1}^{c*} 、 π_{sc2}^{c*} 是各自品牌忠誠度 B_1 、 B_2 的增函數，隨著品牌忠誠度的提高，供應鏈最優利潤將會跟著提高。

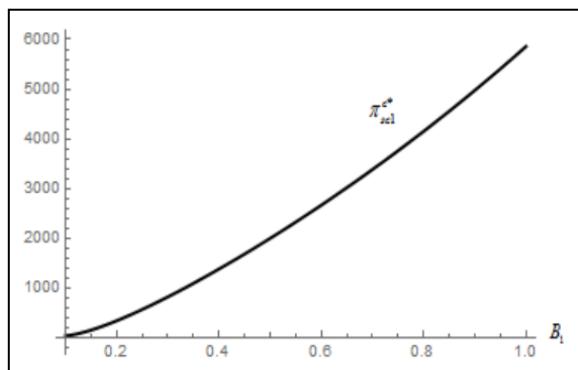


圖 5. 品牌 1 忠誠度對分散式決策最優利潤的影響

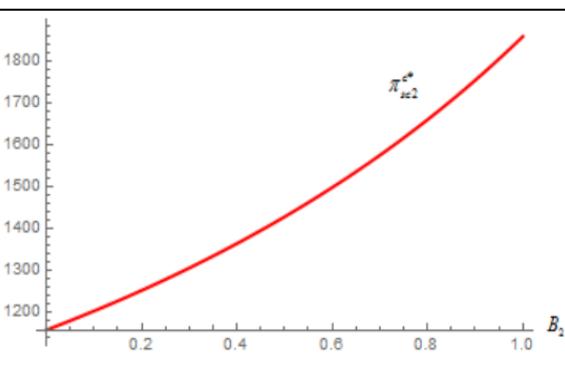


圖 6. 品牌 2 忠誠度對分散式決策最優利潤的影響

4.3 渠道交叉係數與品牌交叉係數對最優利潤的影響

分散式決策下渠道交叉係數 α 與品牌交叉係數 β 對最優利潤的影響如圖 7；集中式決策下渠道交叉係數 α 與品牌交叉係數 β 對最優利潤的影響如圖 8。由圖 7 可知，分散式決策下製造商 M_1 零售渠道與網絡渠道的最優利潤 π_0^* 、 π_1^* ，與製造商 M_2 的最優利潤 π_2^* 是渠道交叉係數 α 的增函數，也是品牌交叉係數 β 的增函

數，並且渠道交叉係數 α 的影響比品牌交叉係數 β 更顯著。由圖 8 可知，集中式決策下，製造商 M_1 供應鏈的最優利潤 π_{sc1}^{c*} 與製造商 M_2 供應鏈的最優利潤 π_{sc2}^{c*} ，是渠道交叉係數 α 的增函數，也是品牌交叉係數 β 的增函數，並且渠道交叉係數 α 的影響比品牌交叉係數 β 更顯著。

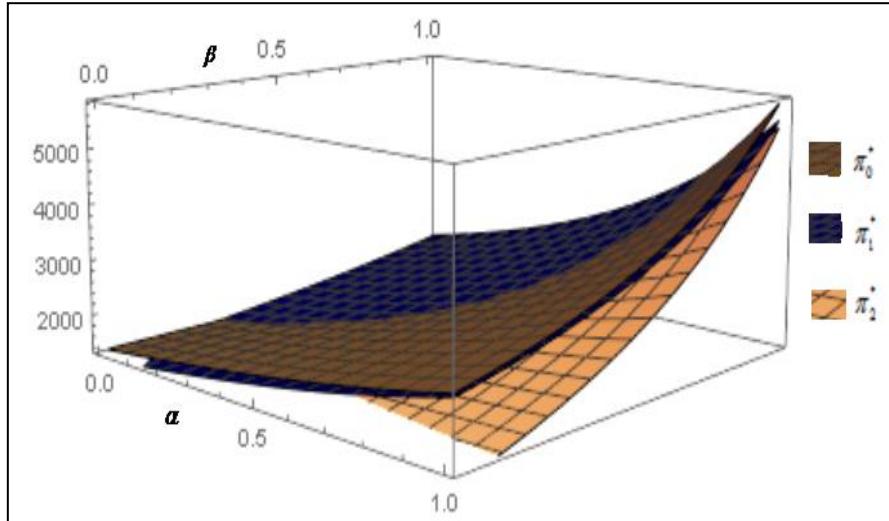


圖 7. 渠道交叉係數與品牌交叉係數對分散式決策最優價格的影響

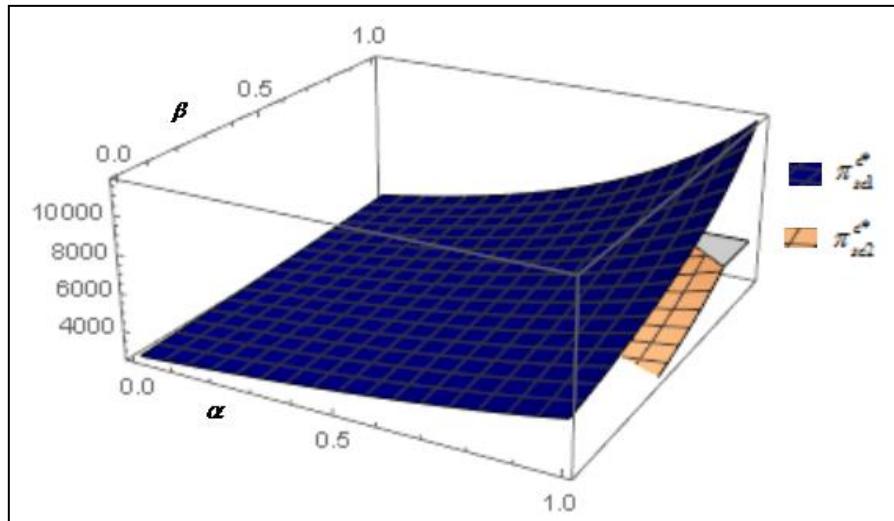


圖 8. 渠道交叉係數對分散式決策最優利潤的影響

5. 結語

製造商 M_1 與 M_2 品牌競爭下，兩製造商之間存在競合關係，製造商 M_1 的網絡渠道與零售渠道也存在競合關係，這些相互之間的競合關係形成了量子糾纏的現象。從量子博奕的觀點來看製造商 M_1 與 M_2 品牌競爭下的定價，發現不論是在分散式決策下還是在集中式決策下，當量子糾纏度 $\gamma > 0$ 時，量子博奕的最優價格與最優利潤皆存在；當量子糾纏度 γ 變更，量子博奕決策的定價亦隨之改變。隨著量子糾纏度越大，當 $\gamma \rightarrow \infty$ 時，量子博奕的最優價格最後保持收斂。

在管理上的意義如下：由於量子糾纏度代表的是製造商 M_1 與 M_2 之間，及 M_1 雙渠道供應鏈的網絡渠道與零售渠道之間的競合關係，隨著量子糾纏度增加，最優利

潤會有所提高；亦即當某一博弈方擬訂策略後，若其它博弈方隨之調整策略的速度越快，則越能使各博弈方的最優利潤提高。量子博弈模型的計算較經典模型複雜且計算量龐大，在管理決策上必須借助編程或數學計算軟件來進行。由數值模擬分析，品牌忠誠度高於某一數值後，最優利潤是品牌忠誠度的增函數，隨著品牌忠誠度的提高，最優利潤將會跟著提高，因此擬訂策略提高品牌忠誠度，將有助於提高獲利。

參考文獻

1. 王虹、周晶 (2010)。競爭和風險規避對雙渠道供應鏈決策的影響。管理科學，23(1)，10-17。
2. 申成然、熊中楷、晏偉 (2014)。網絡比價行為下雙渠道定價及協調策略研究。中國管理科學，22(1)，84-93。
3. 馬鵬、王海燕 (2015)。促銷努力競爭情形下雙渠道供應鏈協調策略。工業工程，18(4)，85-91。
4. 王曉鋒、凡友榮、段永瑞、甯紹英 (2015)。考慮品牌競爭的雙渠道供應鏈定價策略研究。工業工程與管理，20(3)，36-43。
5. 李景峰、張文靜、毋江波 (2017)。傳統品牌與網貨品牌競爭下的多渠道供應鏈定價研究。工業技術經濟，36(3)，107-115。
6. 張有中 (2020)。雙渠道供應鏈定價的量子博弈。工業工程與管理，25(5)，145-153。
7. 路曉偉、蔣馥 (2005)。CRM 中客戶忠誠對價格敏感性的影響研究。管理工程學報，1，74-76。
8. Banker, R. D., Khosla, I., & Sinha, K. K. (1998). Quality and competition. *Management Science*, 44(9), 1179-1192.
9. Chen, Y. C., Fang, S. C., & Wen, U. P. (2013). Pricing policies for substitutable products in a supply chain with internet and traditional channels. *European Journal of Operational Research*, 224(3), 542-551.
10. Chiang, W., & Hess, C. (2003). Direct marketing, indirect profits: A strategic analysis of dual-channel supply chain design. *Management Science*, 49(1), 1-20.
11. Eisert, J., Wilkens, M., & Lewenstein, M. (1999). Quantum games and quantum strategies. *Physical Review Letters*, 83(15), 3077-3080.
12. Erdem, T., Swait, J., & Louviere, J. (2002). The impact of brand credibility on consumer price sensitivity. *International Journal of Research in Marketing*, 19(1), 1-19.
13. Kurata, H., Yao, D. Q., & Liu, J. J. (2007). Pricing policies under direct vs. indirect channel competition and national vs. store brand competition. *European Journal of Operational Research*, 180(1), 262-281.
14. Meyer, D. A. (1999). Quantum strategies. *Physical Review Letters*, 82(5), 1052-1055.
15. Wei, H., & Swaminathan, J. M. (2009). Introduction of a second channel: Implications for pricing and profits. *European Journal of Operational Research*, 194(1), 258-279.
16. Yan, R. (2011). Managing channel coordination in a multi-channel manufacturer-retailer supply chain. *Industrial Marketing Management*, 40(4), 636-642.
17. Yan, R., Guo, P., Wang, J., & Amrouche, N. (2011). Product distribution and coordination strategies in a multi-channel context. *Journal of Retailing and Consumer Services*, 18(1), 19-26.
18. Yao, D. Q., & Liu, J. J. (2005). Competitive pricing of mixed retail and e-tail distribution channels. *Omega*, 33(3), 235-247.

附錄：

定理 1 的證明

將 (21) – (26) 式代入 (4)、(5)、(6) 式可得零售商 T 及製造商 M_1, M_2 的利潤函數，根據利潤函數的一階導數條件 $\frac{\partial \pi_j}{\partial x_j} = 0, j = 0, 1, 2$ ，可得 $BX = L$ ，亦即：

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix}$$

其中，

$$\begin{aligned} B_{11} &= -2f_0(b_1f_0 - \alpha f_1 - \alpha\beta f_2) \\ B_{12} &= -2b_1f_0f_2 + \alpha(f_0^2 + f_1f_2) + \alpha\beta(f_0f_1 + f_2^2) \\ B_{13} &= -2b_1f_0f_1 + \alpha(f_0f_2 + f_1^2) + \alpha\beta(f_0^2 + f_1f_2) \\ B_{21} &= -2b_1f_0f_1 + \alpha(f_0^2 + f_1f_2) + \beta(f_0f_2 + f_1^2) \\ B_{22} &= -2f_0(b_1f_0 - \alpha f_2 - \beta f_1) \\ B_{23} &= -2b_1f_0f_2 + \alpha(f_0f_1 + f_2^2) + \beta(f_0^2 + f_1f_2) \\ B_{31} &= -2b_2f_0f_2 + \alpha\beta(f_0^2 + f_1f_2) + \beta(f_0f_1 + f_2^2) \\ B_{32} &= -2b_2f_0f_1 + \alpha\beta(f_0f_2 + f_1^2) + \beta(f_0^2 + f_1f_2) \\ B_{33} &= -2f_0(b_2f_0 - \alpha\beta f_1 - \beta f_2) \\ L_1 &= -f_0a_0 - f_0b_1v + \omega(-b_1f_0 + \alpha f_1 + \alpha\beta f_2) \\ L_2 &= -(\omega - c_1)(-b_1f_2 + \alpha f_0 + \alpha\beta f_1) - f_0a_1 + f_0\alpha v + c_1(-b_1f_0 + \alpha f_2 + \beta f_1) \\ L_3 &= -f_0a_2 + \alpha\beta f_0v + c_2(-b_2f_0 + \alpha\beta f_1 + \beta f_2) \end{aligned}$$

由假設條件 (27) 式，各博奕方利潤函數的二階導數為：

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \pi_0}{\partial x_0^2} &= -2f_0(b_1f_0 - \alpha f_1 - \alpha\beta f_2) < -2f_0(b_1f_0 - f_1 - f_2) < 0 \\ \frac{\partial^2 \pi_1}{\partial x_1^2} &= -2f_0(b_1f_0 - \alpha f_2 - \beta f_1) < -2f_0(b_1f_0 - f_1 - f_2) < 0 \\ \frac{\partial^2 \pi_2}{\partial x_2^2} &= -2f_0(b_2f_0 - \alpha\beta f_1 - \beta f_2) < -2f_0(b_2f_0 - f_1 - f_2) < 0 \end{aligned}$$

證明了 Nash 均衡解的存在。因為 $f_0^3 + f_1^3 + f_2^3 - 3f_0f_1f_2 = 1$ ，可得：

$$\begin{aligned} |B| &= (f_0^3 + f_1^3 + f_2^3 - 3f_0f_1f_2) \{ 2[(1 + \alpha^2)\beta^2b_1 - 4b_1^2b_2 + \alpha^2(\beta^2 + b_2)]f_0^3 \\ &\quad - [(\alpha\beta(\alpha^2 + \beta + \alpha\beta^2) - 4\alpha\beta b_1^2 - 4(\alpha + \beta)b_1b_2)f_1 \\ &\quad + (\alpha\beta(\alpha + \alpha^2\beta + \beta^2) - 4\beta b_1^2 - 4\alpha(1 + \beta)b_1b_2)f_2]f_0^2 \\ &\quad - 2[\alpha b_2(\beta f_1 + \alpha f_2)(f_1 + \beta f_2) \\ &\quad + \beta b_1(\alpha f_1 + f_2)((\alpha + \beta)f_1 + \alpha(1 + \beta)f_2)]f_0 \\ &\quad + \alpha\beta(\alpha f_1 + f_2)(\beta f_1 + \alpha f_2)(f_1 + \beta f_2) \} \\ &= \{ 2[(1 + \alpha^2)\beta^2b_1 - 4b_1^2b_2 + \alpha^2(\beta^2 + b_2)]f_0^3 \\ &\quad - [(\alpha\beta(\alpha^2 + \beta + \alpha\beta^2) - 4\alpha\beta b_1^2 - 4(\alpha + \beta)b_1b_2)f_1 \\ &\quad + (\alpha\beta(\alpha + \alpha^2\beta + \beta^2) - 4\beta b_1^2 - 4\alpha(1 + \beta)b_1b_2)f_2]f_0^2 \\ &\quad - 2[\alpha b_2(\beta f_1 + \alpha f_2)(f_1 + \beta f_2) \\ &\quad + \beta b_1(\alpha f_1 + f_2)((\alpha + \beta)f_1 + \alpha(1 + \beta)f_2)]f_0 \\ &\quad + \alpha\beta(\alpha f_1 + f_2)(\beta f_1 + \alpha f_2)(f_1 + \beta f_2) \} \end{aligned}$$

若 $|B| \neq 0$ ，應用克萊姆法則（Cramer's Rule），可得最佳策略解：

$$\begin{aligned}x_0^* &= \frac{1}{|B|} \{L_1(B_{22}B_{33} - B_{23}B_{32}) + L_2(B_{32}B_{13} - B_{12}B_{33}) + L_3(B_{12}B_{23} - B_{13}B_{22})\}x_1^* \\&= \frac{1}{|B|} \{L_1(B_{23}B_{31} - B_{21}B_{33}) + L_2(B_{11}B_{33} - B_{13}B_{31}) + L_3(B_{21}B_{13} - B_{11}B_{23})\} \\x_2^* &= \frac{1}{|B|} \{L_1(B_{21}B_{32} - B_{22}B_{31}) + L_2(B_{12}B_{31} - B_{11}B_{32}) + L_3(B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21})\}\end{aligned}$$

因此量子博弈中的策略解 x_0^* 、 x_1^* 和 x_2^* ，使各博弈方具有最大利潤。將策略解代入（21）、（22）和（23）式，可得各博弈方量子博弈的最優價格如定理 1 證畢。

定理 2 的證明

證明：方法如定理 1，此處不再贅述。

收稿日期：2021-05-06
責任編輯、校對：莊斯淇、陳虹酉